

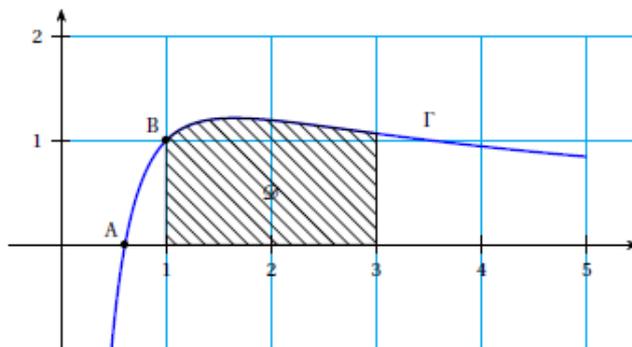
Savoir Fi. 5 : Calcul d'aires (généralisation)

Exercice 16 : Calcul d'aire avec fonction positive

1) On considère la fonction g , définie sur $[0,5 ; 5]$, et telle que pour tout x , on ait :

$$g(x) = \frac{2 \ln x + 1}{x}$$

et Γ sa courbe représentative dans le repère ci-contre. On note \mathcal{D} le domaine défini par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.



a. Par lecture graphique, encadrer par deux entiers l'aire de \mathcal{D} , exprimée en unités d'aire.

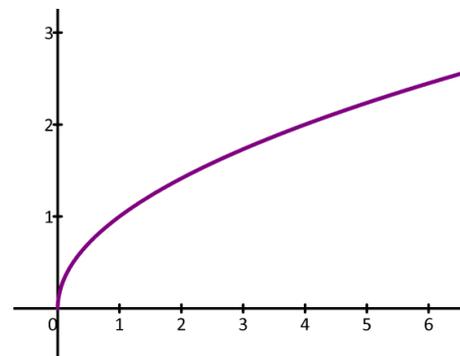
b. On définit la fonction G sur l'intervalle $[0,5 ; 5]$ par $G(x) = \ln x (\ln x + 1)$. Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0,5 ; 5]$.

c. Déterminer l'aire de \mathcal{D} exprimée en unités d'aire.

2) On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ représentée ci-contre.

a. Prouver que la fonction ϕ définie sur $[0; +\infty[$ par $\phi(x) = \frac{2x}{3} \sqrt{x}$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$

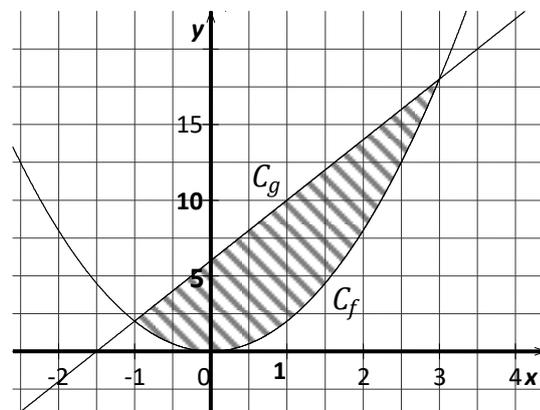
b. En déduire l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$ et la courbe représentative de f , sachant qu'une unité d'aire sur le dessin représente 6 cm^2



3) On a représenté ci-contre les courbes C_f et C_g des fonctions définies par : $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = 4x + 6$

a. Donner l'expression de l'intégrale qui permet de calculer l'aire \mathcal{A} de la région hachurée ci-contre.

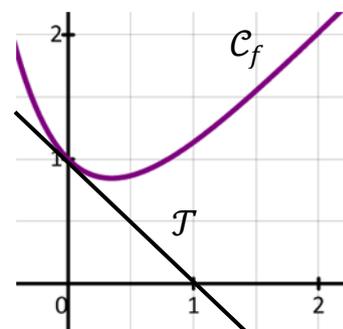
b. Calculer la valeur exacte de \mathcal{A} .



4) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-2x} + x$ et C_f sa représentation. La droite \mathcal{T} d'équation $y = -x + 1$ est tangente à C_f en $x = 0$. On admet que, pour tout $t \leq 0$, on a $e^t \geq 1 + t$.

a. En déduire que C_f est toujours au-dessus de \mathcal{T} sur $[0; 1]$

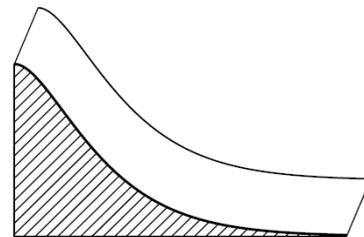
b. Calculer l'aire du domaine compris entre C_f , \mathcal{T} et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$



Exercice 17 : Mise en contexte

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

Voici ce schéma :



Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe \mathcal{C} représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 8]$ par :

$$f(x) = 10xe^{-x}$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma.

Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros, augmenté de 50 euros par m^2 peint.

a. soit g la fonction définie sur $[1; 8]$ par :

$$g(x) = 10(-x - 1)e^{-x}$$

Déterminer g' .

b. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

