EXERCICES EN CLASSE

TERM MATHS COMP

CONTINUITÉ & CONVEXITÉ



SAVOIRS FC

Savoir FC.1 : Théorème des valeurs intermédiaires et $f(x) = a$

Exercice 1. Nombre de solutions d'une équation $f(x) = a$ (à partir du tableau de var.)

On donne les tableaux de variation de deux fonctions f et g :

Tableau de variation de f

x	−7		−2		1		4
$f(x)$	−3	↗	4	→	4	↘	0

Tableau de variation de g

x	−10		−6		−1		2		8		10
$g(x)$	3	↘	0	↘	−5	↗	0	↗	9	↘	1

Fonction f

a) On considère l'équation $f(x) = 3$. Combien a-t-elle de solutions ? Dans quels intervalles sont-elles ?
b) On considère l'équation $f(x) = -2$. Combien a-t-elle de solutions ? Dans quels intervalles sont-elles ?
c) Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$?
d) Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -6$?

Fonction g

a) On considère l'équation $g(x) = 2$. Combien a-t-elle de solutions ? Dans quels intervalles sont-elles ?
b) Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$?
c) Combien l'équation $g(x) = -1$ a-t-elle de solutions ?
d) Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = -5$?

Exercice 2. Nombre de solutions d'une équation $f(x) = a$

1) On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$. b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 1]$
c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

2) On considère la fonction g définie sur [0 ; 2] par : $g(x) = (1 - x)e^x$
Démontrer que l'équation $g(x) = -2$ n'a qu'une seule solution α sur l'intervalle [0 ; 2].

3) On considère la fonction h définie sur [0,5 ; 10] par : $h(x) = 0{,}5x - ln(x) + 2{,}5$
Combien l'équation $h(x) = 3$ a-t-elle de solution sur [0,5 ; 10] ?

4) On considère l'équation : $x^3 - 12x + 1 = 0$.
Combien a-t-elle de solutions sur l'intervalle [–4 ; 4] ?

Exercice 3. Valeur approchée d'une solution de $f(x) = a$

1) On considère la fonction f définie sur par : $f(x) = x\ln(x)$.
On admet qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; 3].
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} de la solution α de l'équation $f(x) = 2$ sur l'intervalle [1 ; 3].

2) On considère la fonction g définie sur par : $g(x) = (3 - x)e^{-0{,}2x}$.
On admet qu'elle est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 2].
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} de la solution α de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle [0 ; 2].

Savoir FC.2 : Des variations de f' au signe de f

Exercice 1. Des variations de f au signe de f

On donne le tableau de variation de deux fonctions f et g :

x	2		13
$f(x)$	8	↘	–2

x	–4		3		9
$g(x)$	–2	↗	7	↘	–3

1) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution sur [2 ; 13]. On la notera a.
b) Donner le tableau de signe de la fonction f sur [2 ; 13].

2) Donner le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle [–4 ; 9]. On précisera les notations utilisées.

Exercice 2. Du signe de f' au signe de f

1) a) On considère la fonction f définie sur $[-1\,;2]$ par : $f(x) = 6x^2 - 2x^3 - 2$
Montrer que l'expression de sa dérivée peut s'écrire : $f'(x) = 6x(2-x)$
b) Montrer que le tableau de variations de f est :

x	–1		0		2
$f(x)$	6	↘	–2	↗	6

c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions qu'on notera α et β.
d) Dresser le tableau de signe de la fonction f.

2) a) On considère la fonction f définie sur $[1\,;4]$ par : $f(x) = x^2 - 8\ln x$
Montrer que sa dérivée est définie sur [1 ; 4] par : $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$
b) Dresser le tableau de signes de f sur [1 ; 4]. On précisera les notations utilisées.

Exercice 3. Des variations de f' aux variations de f

1) On considère une fonction h dont **la dérivée h'** a pour tableau de variations :

x	3		10
$h'(x)$	5	↘	–3

En déduire le tableau de variation **de h**.
On précisera les notations utilisées.

2) On considère une fonction G définie sur [–1 ; 5] par $G(x) = (x^3 + 30x^2 - 60x - 60)e^x$.
On admettra que sa dérivée est donnée par : $G'(x) = g(x).e^x$, où g a pour tableau de variations :

x	–1		2		5
$g(x)$	–146	↗	124	↘	–200

Déterminer le tableau de variation de G sur l'intervalle [–1 ; 5]. On précisera les notations utilisées.

3) On considère la fonction f définie sur [1 ; 3] par : $f(x) = (x + \ln(x))e^{-x}$
On admettra que sa dérivée est définie par : $f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x} - x - \ln(x)\right)e^{-x}$
On appelle g la fonction définie par : $g(x) = 1 + \frac{1}{x} - x - \ln(x)$
On admettra que sa dérivée est définie par : $g'(x) = -\frac{x^2+x+1}{x^2}$ et on admettra qu'elle est strictement négative sur [1 ; 3].
Déterminer le tableau de variation de f sur [1 ; 3].

Savoir FC.3 : Etude algébrique de la convexité

Exercice 1. À partir de l'expression de f''

1) On considère la fonction f définie sur IR\{0} dont la dérivée seconde f'' est donnée par :

$$f''(x) = \frac{(1-x)(x+2)}{x}$$

a) Décrire la convexité de la fonction f.
b) Combien la courbe de f a-t-elle de points d'inflexion ? Quelles sont leurs abscisses ?
c) Quelle est la position relative de la courbe de f et de ses tangentes ?

2) On considère une fonction g définie sur IR par : $g(x) = (x^2 + 5x + 6)(2x - 8)$

On considère une fonction H définie sur IR dont la dérivée seconde H'' est donnée par : $H''(x) = g(x).e^{-2x}$

a) Décrire la convexité de la fonction H.
b) Combien la courbe de H a-t-elle de points d'inflexion ? Quelles sont leurs abscisses ?
c) Quelle est la position relative de la courbe de H et de ses tangentes ?

Exercice 2. À partir de l'expression de f

1) On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 6x - 1$

a) Donner l'expression de $f'(x)$, où f' est la dérivée de la fonction f.
b) Donner l'expression de $f''(x)$, où f'' est la dérivée seconde de la fonction f.
c) Dresser le tableau de signe de f''.
d) Pour quelles valeurs de x la courbe de f est-elle au-dessus de ses tangentes ?

2) On considère la fonction g définie sur IR\{0} par : $g(x) = \frac{x^2-5x+1}{x^2}$

a) On appelle g' est la dérivée de la fonction g. Montrer que : $g'(x) = \frac{5x-2}{x^3}$
b) On appelle g'' est la dérivée seconde de la fonction g. Montrer que : $g''(x) = \frac{6-10x}{x^4}$
c) Pour quelles valeurs de x la courbe de g est-elle en dessous de ses tangentes ?

3) On considère la fonction h définie pour tout réel x par : $h(x) = 2x^4 - x^3 + x - 2$.
Pour quelles valeurs de x la courbe de h est-elle au-dessus de ses tangentes ?

Savoir FC.4 : Détermination de coefficients

Exercice 1. À partir d'une valeur de f et d'une valeur de f'

1) On définit la fonction f sur IR par : $f(x) = a\,e^{bx}$

On donne : $f(0) = 3$ et $f'(0) = -6$.

Déterminer les valeurs des coefficients a et b. Quelle est alors l'expression de f ?

2) On définit la fonction g sur IR par : $g(x) = (x + a)e^{kx}$

On donne : $g(0) = -2$ et $g'(0) = -5$.

Déterminer les valeurs des coefficients a et k. Quelle est alors l'expression de g ?

3) On définit la fonction h sur $[-1\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = a\ln(2x + 3) + b$

On donne : $h(-1) = 4$ et $h'(0) = 1$.

Déterminer les valeurs des coefficients a et b. Quelle est alors l'expression de h ?

4) On définit la fonction a sur IR par : $a(x) = \frac{c}{2+e^{dx}}$

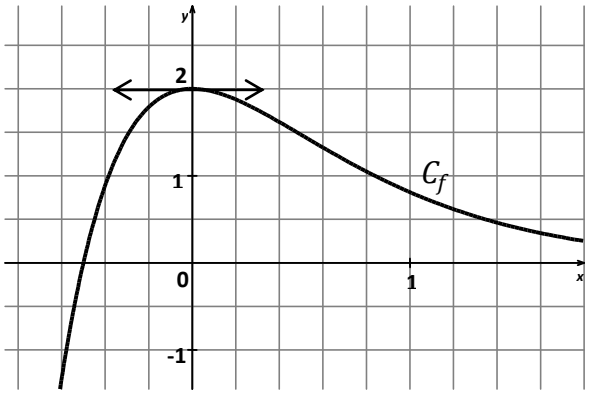
On donne : $a(0) = 3$ et $a'(0) = 1$.

Déterminer les valeurs des coefficients c et d. Quelle est alors l'expression de a ?

Exercice 2. À partir de valeurs lues sur la courbe

1) La représentation graphique ci-contre est celle d'une fonction f définie sur IR dont l'expression algébrique est de la forme :

$$f(x) = (ax + b)e^{-2x}$$

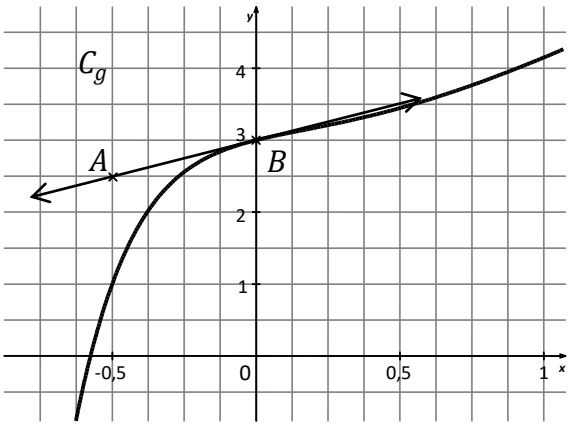


a) Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.
b) En déduire le système d'équation vérifié par a et b.
c) En déduire l'expression de f.

2) La représentation graphique C_g ci-contre est celle d'une fonction g définie sur IR dont l'expression algébrique est de la forme :

$$g(x) = (2x - \alpha)e^{-3x} + \beta(x + 1)$$

La tangente à C_g en $x = 0$ passe par les points $A(-0{,}5\,;\,2{,}5)$ et $B(0\,;\,3)$.



a) Déterminer graphiquement $g(0)$ et $g'(0)$.

b) En déduire les valeurs de α et de β, puis l'expression de g.

Corrections

Savoir FC.1 : CORRECTION

Exercice 1. CORRECTION

Fonction f

a) sur $[-7;-2]$:
- f est **continue**
- f est **strictement croissante**
- on a $f(-7)<3$ et $f(-2)>3$ donc $3\in[f(-7);f(-2)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=3$ a donc une seule solution sur $[-7;-2]$

sur $[-2;1]$:
- f est **continue**
- f est **constante**
- on a $f(x)=4>3$ donc $3\notin[f(-2);f(1)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=3$ n'admet pas de solution sur $[-2;1]$

sur $[1\ ;\ 4]$:
- f est **continue**
- f est **strictement décroissante**
- on a $f(1)>3$ et $f(4)<3$.donc $3\in[f(4);f(1)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=3$ a donc une seule solution sur $[1\ ;\ 4]$

L'équation $f(x)=3$ a donc **en tout deux solutions : $\alpha\in]-7\ ;\ -2[$ et $\beta\in]1\ ;\ 4[$.**

b) sur $[-7;-2]$:
- f est **continue**
- f est **strictement croissante**
- $f(-7)<-2$ et $f(-2)>-2$ donc $-2\in[f(-7);f(-2)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=-2$ a donc une seule solution sur $[-7;-2]$

sur $[-2;1]$:
- f est **continue**
- f est **constante**
- on a $-2\notin[f(-2);f(1)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=-2$ n'admet pas de solution sur $[-2;1]$

sur $[1\ ;\ 4]$:
- f est **continue**
- f est **strictement décroissante**
- on a $-2\notin[f(4);f(1)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=-2$ n'admet pas de solution sur $[1\ ;\ 4]$

Donc au final l'équation $f(x)=-2$ **n'a qu'une seule solution, qui se situe dans l'intervalle $]-7\ ;\ -2[$.**

c) L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=4$ est $\boldsymbol{S=[-2;1]}$, car f est constante et égale à 4 sur cet intervalle.

d) f est continue sur $[-7;2]$ mais pour tout $x\in[-7;4]$, on a $f(x)\geq-3$ donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=-6$ est $\boldsymbol{S=\emptyset}$.

Fonction g

a) g est **continue** sur $[-10;10]$. Elle est **strictement décroissante, puis croissante puis décroissante** sur les 3 intervalles $[-10;-1]$, $[-1;8]$ et $[8;10]$ avec : $f(-10)>2>f(-1)$; $f(-1)<2<f(8)$ et $f(8)>2>f(10)$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=2$ possède donc exactement 3 solutions : $x_1\in]-10;-1[$ $x_2\in]-1;8[$ $x_3\in]8;10[$.
Sachant que $f(-6)=f(2)=0$, on peut même préciser :
$x_1\in]-10;\mathbf{-6}[$ $x_2\in]\mathbf{2};8[$ $x_3\in]8;10[$.
b) L'ensemble des solutions de l'équation $g(x)=0$ est $S=\{-6;2\}$
c) Comme précédemment, l'équation $g(x)=-1$ possède deux solutions.
d) L'ensemble des solutions de l'équation $g(x)=-5$ est $S=\{-1\}$.

Exercice 2. CORRECTION

1) a) $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$.

b) On a $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

x	0		1
$3x$	0	+	
$x-2$		−	
$f'(x)$	0	−	
$f(x)$	1	↘	-1

c) f est **continue** et **strictement décroissante** sur [0 ;1] avec $f(0) > 0 > f(1)$,
D'après le thm des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a donc une solution et une seule sur l'intervalle $[0\,;1]$.

2) Il faut calculer la dérivée de g afin de dresser son tableau de variation :
On a : $g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$.

Donc :

x	0		2
$-x$	0	−	
e^x		+	
$g'(x)$	0	−	
$g(x)$	1	↘	$-e^2 \simeq -7{,}4$

g est **continue** et **strictement décroissante** sur [0 ;2] avec $f(0) > -2 > f(1)$,
D'après le thm des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ a une solution α et une seule sur l'intervalle $[0\,;2]$.

3) On a : $h'(x) = 0{,}5 - \frac{1}{x} = \frac{0{,}5x-1}{x}$. On a d'autre part : $h(0{,}5) \simeq 3{,}4$ $h(2) \simeq 2{,}8$ $h(10) \simeq 5{,}2$
On obtient donc le tableau :

x	0,5		2		10
$0{,}5x-1$		−	0	+	
x		+	|	+	
$h'(x)$		−	0	+	
$h(x)$	$\simeq 3{,}4$	↘	$\simeq 2{,}8$	↗	$\simeq 5{,}2$

h est **continue**.
Elle est **sttmt décroissante** sur $[0{,}5;\,2]$ et **sttmt croissante** sur $[2;\,10]$ avec $h(0{,}5) > 3 > h(2)$ et $h(2) < 3 < h(10)$.
D'après le thm des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 3$ a donc 2 solutions sur [0,5 ; 10].

4) On appelle f la fonction définie sur [–4 ; 4] par : $f(x) = x^3 - 12x + 1$.
On a : $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$. (on peut aussi trouver son signe avec Δ et les racines…).
On a d'autre part : $f(-4) = -15$ $f(-2) = 17$ $f(2) = -15$ $f(4) = 17$
On obtient donc :

x	−4		−2		2		4
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-15	↗	17	↘	-15	↗	17

f est continue. Elle est strictement monotone sur les intervalles $[-4;-2]$; $[-2;2]$ et $[2;4]$.
On a de plus : $f(-4) < 0 < f(-2)$ et $f(2) < 0 < f(4)$.
D'après le thm des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a donc 3 solutions sur [–4 ; 4].
Donc l'équation : $x^3 - 12x + 1 = 0$ aussi.

Exercice 3. CORRECTION

1) *[**Ce qu'on fait sur la calculatrice sans nécessairement l'écrire sur la copie :***
Avec un tableau de pas 1 partant de $x = 1$, on trouve : α entre entre 2 et 3
Avec un tableau de pas 0,1 partant de $x = 2$, on trouve : α entre entre 2,3 et 2,4
Avec un tableau de pas 0,01 partant de $x = 2{,}3$, on trouve : α entre entre 2,34 et 2,35
Avec un tableau de pas 0,001 partant de $x = 2{,}34$, on trouve : α entre entre 2,345 et 2,346]

On écrit sur la copie :
On trouve $f(2{,}345) < 2$ et $f(2{,}346) > 2$.
On en déduit que : $\alpha \simeq 2{,}35$ au centième près.

2) *[Avec un tableau de pas 1 partant de $x = 0$, on trouve : $f(2) < 1 < f(1)$*
Avec un tableau de pas 0,1 partant de $x = 1$, on trouve : $f(1{,}7) < 1 < f(1{,}6)$
Avec un tableau de pas 0,01 partant de $x = 1{,}6$, on trouve : $f(1{,}62) < 1 < f(1{,}61)$
Avec un tableau de pas 0,001 partant de $x = 1{,}61$]
On trouve : $f(1{,}618) < 1 < f(1{,}617)$
On en déduit que : $\alpha \simeq 1{,}62$ au centième près.

Savoir FC.2 : CORRECTION

Exercice 1. CORRECTION

1) a) f est continue et strictement décroissante sur [2 ; 13] avec $f(2) > 0$ et $f(13) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une seule solution *a* sur [2 ; 13].

b) On a alors :

x	2	a	13
$f(x)$	8	↘ 0	–2
Signe de f	**+**	**0**	**–**

2) De même, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède deux solutions qu'on peut par exemple appeler $x_1 \in]-4; 3[$ et $x_2 \in]3; 9[$.

On a alors :

x	–4	x_1	3	x_2	9
$g(x)$	–2	↗ 0	7	↘ 0	–3
Signe de g	**–**	**0**	**+** | **+**	**0**	**–**

Exercice 2. CORRECTION

1) a) On a : $f'(x) = 12x - 6x^2 = 6x(2 - x)$
CQFD.
b) On a : $6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$
D'autre part, $f(-1) = 6$ $f(0) = -2$ $f(2) = 6$.

On obtient donc le tableau :

x	–1		0		2
$6x$		–	0	+	
$2 - x$		+	|	+	0
$f'(x)$		–	0	+	0
$f(x)$	6	↘	–2	↗	6

c) f est continue. Elle est strictement monotone sur $[-1; 0]$ et sur $[0; 2]$. On a $f(-1) > 0$; $f(0) < 0$ et $f(2) > 0$.
D'après le thm des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc deux solutions α et β.

x	–1	α	0	β	2
$f(x)$	6	↘ 0	–2	↗ 0	6

d) On en déduit le tableau de signe de la fonction f :

x	–1	α	0	β	2
Signe de f	**+**	**0**	**–** | **–**	**0**	**+**

2) a) On a : $f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2-8}{x}$

Or par développement, on a :

$$2(x-2)(x+2) = 2(x^2-4) = 2x^2-8$$

On a donc effectivement : $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$.

b) On a : $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

et $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

D'autre part :

$f(1)=1$ $\quad f(2)\approx -1{,}54$ $\quad f(4)\approx 4{,}91$.

On obtient donc :

x	1		2		4
$x-2$	–		0	+	
$x+2$	+		|	+	
x	+		|	+	
$f'(x)$	–		0	+	
$f(x)$	1	↘	$\simeq -1{,}54$	↗	$\simeq 4{,}91$

f est continue. Elle est strictement monotone sur $[1;2]$ et sur $[2;4]$. On a $f(1)>0$; $f(2)<0$ et $f(4)>0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ possède donc deux solutions qu'on note α et β. On a ainsi :

x	1		α		2		β		4
$f(x)$	1	↘	0	↘	$\simeq -1{,}54$	↗	0	↗	$\simeq 4{,}91$
Signe de f	**+**		**0**	**–**	**|**	**–**	**0**	**+**	

Exercice 3. CORRECTION

1) La fonction h' est continue et strictement décroissante sur [3 ; 10] avec $h'(3)>0$ et $h'(10)<0$.

L'équation $h'(x)=0$ a donc une seule solution qu'on note α.

On obtient ainsi :

x	3		α		10
$h'(x)$	5	↘	0	↘	-3
Signe de h'		+	0	–	
Variations de h	$h(3)$	↗	$h(\alpha)$	↘	$h(10)$

2) (Avec la continuité et la stricte monotonie sur 2 intervalles) d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ a deux solutions qu'on note α et β. On a ainsi :

x	1		α		2		β		4
$g(x)$	-146	↗	0	↗	124	↘	0	↘	-200
Signe de g		–	0	+	|	+	0	–	

On en déduit le signe de G' puis les variations de G.

On doit aussi calculer pour cela : $G(1)\approx -241{,}9$ $\quad G(4)\approx 13\,321{,}9$

x	1		α		(2)		β		4
$g(x)$		–	0	+		+	0	–	
e^x		+	|	+		+	|	+	
$G'(x)$		–	0	+		+	0	–	
$G(x)$	–241,9	↘	$G(\alpha)$	↗		↗	$G(\beta)$	↘	13321,9

3) On a : $f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x} - x - \ln(x)\right)e^{-x}$

Et $g(x) = 1 + \frac{1}{x} - x - \ln(x)$

On remarque donc que :

$$f'(x) = g(x) \times e^{-x}$$

Pour déterminer le signe de f', il faut trouver le signe de $g(x)$. On utilise sa dérivée :

$g'(x) = -\frac{x^2+x+1}{x^2}$ toujours négative.

g est continue et strictement croissante avec $g(1) = 1 > 0$ et $g(3) \simeq -3{,}4 < 0$

D'après le thm des valeurs intermédiaires, on obtient donc :

x	1		α		3
$g'(x)$		–			
$g(x)$ (variations)	1	↘	0		–3,4
$g(x)$ (signe)	+		0	–	
e^{-x}	+		|	+	
$f'(x)$	+		0	–	
$f(x)$	e	↗	$(\alpha + \ln(\alpha))e^{-\alpha}$	↘	$\approx 0{,}2$

Savoir FC.3 : CORRECTION

Exercice 1. CORRECTION

1) a) On dresse le tableau de signes de f'' :

On en déduit que f est convexe sur]–∞ ; –2] et sur]0 ; 1], et qu'elle est concave partout ailleurs.

b) Il y a deux points d'inflexions : en $x = -2$ et en $x = 1$.

c) C_f est au-dessus de ses tangentes pour $x \in]-\infty; -2] \cup]0; 1]$ et en dessous ailleurs.

x	–∞		–2		0		1		+∞
$1-x$		+	|	+	|	+	0	–	
$x+2$		–	0	+	|	+	|	+	
x		–	|	–	0	+	|	+	
$f''(x)$		+	0	–	||	+	0	–	

2) a) On calcule : $\Delta = 25 - 24 = 1$.

Les racines de $x^2 + 5x + 6$ sont donc –2 et –3.

On dresse ainsi le tableau de signes de H'' ci-contre.

b) La courbe de H a donc 3 points d'inflexions : en $x = -3$, en $x = -2$ et en $x = 4$.

c) C_H est au-dessus de ses tangentes pour $x \in [-3; -2] \cup [4; +\infty[$ et en dessous ailleurs.

x	–∞		–3		–2		4		+∞
x^2+5x+6		+	0	–	0	+	|	+	
$2x-8$		–	|	–	|	–	0	+	
e^{-2x}		+	|	+	|	+	|	+	
$H''(x)$		–	0	+	0	–	0	+	

Exercice 2. CORRECTION

1) a) $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$ b) $f''(x) = 6x + 3$

c) Signe – 0 +… f est donc convexe sur [–0,5 ; +∞[et concave sur]–∞ ; –0,5].

d) C_f est au-dessus de ses tangentes pour $x \in [-0{,}5; +\infty[$.

2) a) $g'(x) = \frac{(2x-5)\times x^2 - (x^2-5x+1)\times 2x}{x^4} = \frac{2x^3-5x^2-2x^3+10x^2-2x}{x^4} = \frac{5x^2-2x}{x^4} = \frac{x(5x-2)}{x^4} = \frac{5x-2}{x^3}$. CQFD

b) $g''(x) = \frac{(5x^3-(5x-2)\times 3x^2)}{x^6} = \frac{-10x^3+6x^2}{x^6} = \frac{x^2(6-10x)}{x^6} = \frac{6-10x}{x^4}$

c) On obtient :

x	–∞		0		0,6		+∞
$6-10x$		+	|	+	0	–	
x^4		+	0	+	|	+	
$g''(x)$		+	||	+	0	–	

g est donc convexe sur]–∞ ; 0[et sur]0 ; 0,6], puis concave sur [0,6 ; +∞[.

C_g est donc en dessous de ses tangente pour $x \in [0{,}6; +\infty[$.

3) On a : $h'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 1$ et $h''(x) = 24x^2 - 6x = 6x(4x-1)$.
D'après le signe de h'' (faire un tableau…), h est donc convexe sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ et concave partout ailleurs.
C_h est donc au-dessus de ses tangentes pour $x \in \left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Savoir FC.4 : CORRECTION

Exercice 1. Correction

1) D'une part : $f(0) = 3 \Rightarrow a\,e^{b\times 0} = 3 \Rightarrow a\,e^0 = 3 \Rightarrow a \times 1 = 3 \Rightarrow \boldsymbol{a = 3}$.
D'autre part, on a : $f'(x) = a \times be^{bx} = 3be^{bx}$
Donc $f'(0) = -6 \Rightarrow 3be^0 = -6 \Rightarrow 3b = -6 \Rightarrow \boldsymbol{b = -2}$.
On a donc au final : $\boldsymbol{f(x) = 3e^{-2x}}$
2) On a : $g(x) = (x+a)e^{kx}$ et $g'(x) = 1e^{kx} + (x+a) \times ke^{kx} = (1 + kx + ka)e^{kx}$
D'une part : $g(0) = -2 \Rightarrow (0+a)e^0 = -2 \Rightarrow a = -2$.
D'autre part : $g'(0) = -5 \Rightarrow (1+ka)e^0 = -5 \Rightarrow 1 - 2k = -5 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$.
On a donc : $\boldsymbol{g(x) = (x-2)e^{3x}}$
3) On a : $h(x) = a\ln(2x+3) + b$ et $h'(x) = a \times \frac{2}{2x+3} = \frac{2a}{2x+3}$
D'une part : $h(-1) = 4 \Rightarrow a\ln 1 + b = 4 \Rightarrow 0 + b = 4 \Rightarrow b = 4$.
D'autre part : $h'(0) = 1 \Rightarrow \frac{2a}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$. Conclusion : $\boldsymbol{h(x) = \frac{3}{2}\ln(2x+3) + 4}$
4) On a : $a(x) = \frac{c}{2+e^{dx}}$ et $a'(x) = -\frac{c(0+de^{dx})}{(2+e^{dx})^2} = -\frac{cde^{dx}}{(2+e^{dx})^2}$
• $a(0) = 3 \Rightarrow \frac{c}{2+1} = 3 \Rightarrow c = 9$. • $a'(0) = 1 \Rightarrow -\frac{cd}{(2+1)^2} = 1 \Rightarrow -\frac{9d}{9} = 1 \Rightarrow d = -1$.
Conclusion : $\boldsymbol{a(x) = \frac{9}{2+e^{-x}}}$

Exercice 2. Correction

1) a) On trouve : $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$.

b) On a : $f(x) = (ax+b)e^{-2x}$ et $f'(x) = ae^{-2x} + (ax+b)(-2e^{-2x}) = (a - 2ax - 2be^{-2x}$
Le système d'équation est donc :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a\times 0 + b)e^{-2\times 0} = 2 \\ (a - 2a\times 0 - 2b)e^{-2\times 0} = 0 \end{cases}$$

c) On obtient alors :

$$\begin{cases} b \times 1 = 2 \\ (a-2b)\times 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 4 \end{cases}$$

Conclusion : $\boldsymbol{f(x) = (4x+2)e^{-2x}}$

2) a) On trouve : $g(0) = 3$ et $g'(0) = \frac{0,5}{0,5} = 1$ (Attention aux échelles sur les axes !)

b) On a : $g(x) = (2x - \alpha)e^{-3x} + \beta(x + 1)$ et $g'(x) = 2e^{-3x} + (2x - \alpha)(-3e^{-3x}) + \beta$

• $g(0) = 3 \Rightarrow -\alpha + \beta = 3$ • $g'(0) = 1 \Rightarrow 2 + 3\alpha + \beta = 1 \Rightarrow 3\alpha + \beta = -1$

Il faut donc résoudre le système : $\begin{cases} -\alpha + \beta = 3 \\ 3\alpha + \beta = -1 \end{cases}$

Dans la 1re équation, on a : $\beta = \alpha + 3$.

Cela donne alors dans la 2e : $3\alpha + \alpha + 3 = -1 \Rightarrow 4\alpha = -4 \Rightarrow \alpha = -1$.

On a alors $\beta = -1 + 3 = 2$.

Au final : $\boldsymbol{g(x) = (2x + 1)e^{-3x} + 2(x + 1)}$

SOMMAIRE

SAVOIR FC.1 : THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES ET $fx = a$ 2

SAVOIR FC.2 : DES VARIATIONS DE f' AU SIGNE DE f 3

SAVOIR FC.3 : ETUDE ALGEBRIQUE DE LA CONVEXITE 4

SAVOIR FC.4 : DETERMINATION DE COEFFICIENTS 5

SAVOIR FC.1 : CORRECTION 6

SAVOIR FC.2 : CORRECTION 8

SAVOIR FC.3 : CORRECTION 10

SAVOIR FC.4 : CORRECTION 11