

Savoir Ft. 4 : Dérivées

Entraînement 1

1) Dériver les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3x \cos x \quad g_1(x) = 1 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \quad h_1(x) = \frac{1-x}{\sin x} \quad i_1(x) = \cos(2x) e^{2x}$$

2) Soit T la fonction définie sur $[0; \pi]$ par $T(x) = \frac{x}{2} - \sin x$

- Calculer $T'(x)$
- Déterminer le tableau de variation de T
- Montrer que l'équation $T(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.
En donner une valeur approchée à 10^{-2} près

Entraînement 2

1) Dériver les fonctions suivantes :

$$f_2(x) = -\frac{2}{\cos x} \quad g_2(x) = \sin^3 x \quad h_2(x) = \cos(1 + x^2) \quad i_2(x) = \cos(2x) \sin(2x)$$

2) Soit R la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $R(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

- Montrer que $R'(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$
- Déterminer le tableau de variation de R
- Déterminer l'équation de la tangente en $x = \frac{\pi}{3}$

Corrigé Savoir Ft. 4

Corrigé Entraînement I

$$1) f_1'(x) = 3 \cos x - 3x \sin x \quad g_1'(x) = -2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$h_1'(x) = \frac{-1 \sin x - (1-x) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x + (x-1) \cos x}{\sin^2 x}$$

$$i_1'(x) = -2 \sin(2x) e^{2x} + \cos(2x) \times 2e^{2x} = 2e^{2x}(\cos(2x) - \sin(2x))$$

$$2) \text{ a. } T'(x) = \frac{1}{2} - \cos x \quad \text{b. } T'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$T'(x)$	—	0	+
$T(x)$	0 ↘	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	↗ $\frac{\pi}{2}$

c. La fonction T est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$. De plus $T\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$ et $T(\pi) > 0$.

D'après le TVi, l'équation $T(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

On trouve $x_0 \approx 1,9$

Entraînement 2

$$1) f_2'(x) = \frac{2(-\sin x)}{\cos^2 x} = -\frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \quad g_2'(x) = 3 \cos x \sin^2 x \quad h_2'(x) = -2x \sin(1 + x^2)$$

$$i_2'(x) = -2 \sin(2x) \sin(2x) + 2 \cos(2x) \cos(2x) = 2(\cos^2(2x) - \sin^2(2x))$$

$$2) \text{ a. } R'(x) = \frac{2 \cos x \sin x \cos^2 x - \sin^2 x (-2 \sin x \cos x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \cos x \sin x \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{2 \cos x \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \quad \text{CQFD}$$

b.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$		$-$	
$\cos x$	0	$+$	0
$R'(x)$		$-$	
$R(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

$$\text{c. } R\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 3 \quad \text{et} \quad R'(x) = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{8}} = 8\sqrt{3}$$

$$\text{Donc l'équation de la tangente en } x = \frac{\pi}{4} \text{ est } y = 8\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3 \Leftrightarrow y = 8\sqrt{3}x + 3 - \frac{8\pi}{\sqrt{3}}$$