Vecteurs et géométrie dans l'espace
Repères et bases, colinéarité, droites et plans

Savoirs

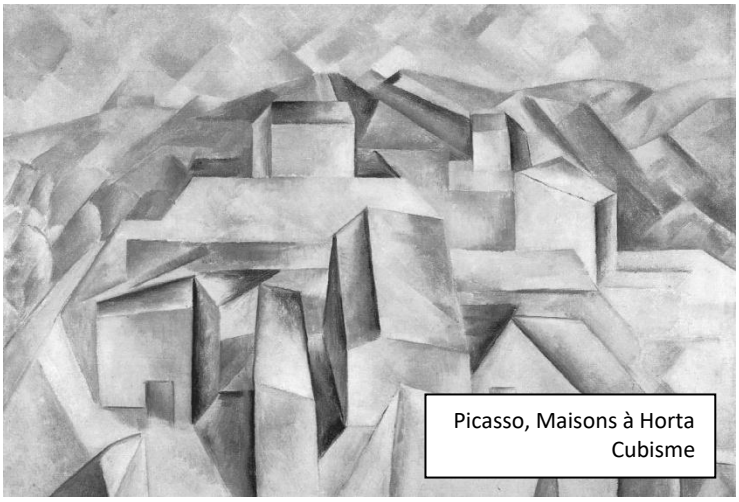
Ve. 1 : Positions relatives de droites et de plans

Ve. 2 : Repères et vecteurs dans l'espace

Ve. 3 : Colinéarité et parallélisme

Ve. 4 : Représentation paramétrique d'une droite

Ve. 5 : Coplanarité

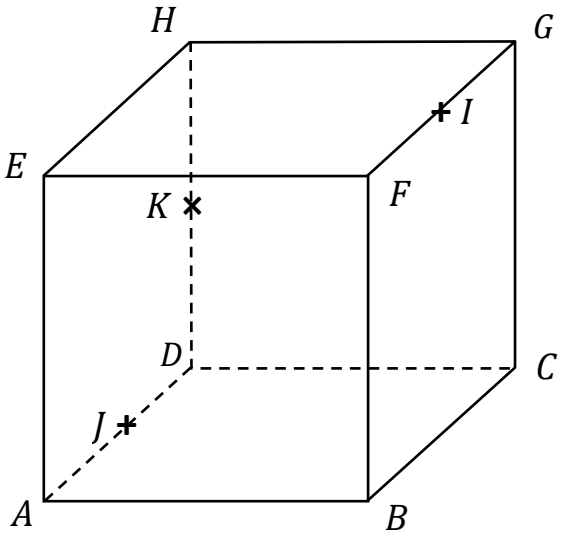


Picasso, Maisons à Horta
Cubisme

Savoirs Ve.1 : Positions relatives de droites et de plans

Exercice 1 : Positions relatives

On considère le cube $ABCDEFGH$ où I, J et K sont les milieux respectifs des côtés $[FG]$, $[AD]$ et $[DH]$.



1) Déterminer les positions relatives des droites, et donner leurs intersections éventuelles.

a) (IB) et (GC) **b)** (HB) et (GA) **c)** (JK) et (AH)

d) (GC) et (BA) **e)** (IB) et (HJ) **f)** (FD) et (GH)

2) Déterminer les positions relatives des droites et des plans, et donner leurs intersections éventuelles.

a) (EJ) et (HDA) **b)** (JK) et (ABE) **c)** (IJ) et (AFG)

d) (FH) et (ACE) **e)** (IJ) et (ABE) **f)** (EJ) et (BCG)

3) Déterminer les positions relatives des plans, et donner leurs intersections éventuelles.

a) (ABJ) et (GIC) **b)** (KGI) et (ABE) **c)** (KGI) et (EAD)

d) (EBG) et (HDC) **e)** (IJK) et (HDC) **f)** (EBI) et (HDC)

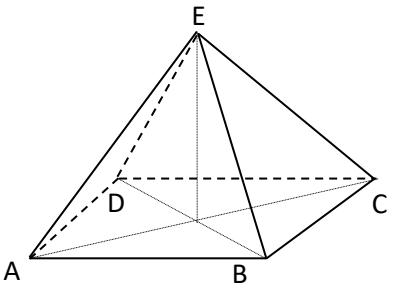
4) Et encore quelques unes : **a)** (HJ) et (EA).

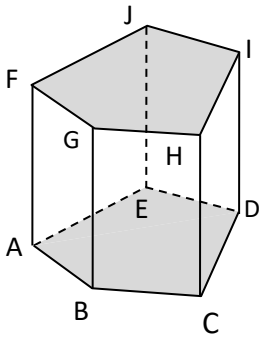
b) (HJ) et (EC).

c) (AH) et (GB).

Exercice 2 : Dans d'autres figures

1) $ABCDE$ est une pyramide à base rectangulaire et I un point de [CE].
Quelle est la position relative de la droite (BC) avec le plan (AED) ?
En déduire l'intersection des plans (IBC) et (EAD).





2) On considère le prisme droite $ABCDEFGHIJ$ ci-contre dont les bases sont des pentagones.

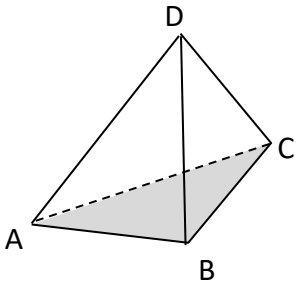
a) Quelle est la position relative des droites (JE) et (CD) ?

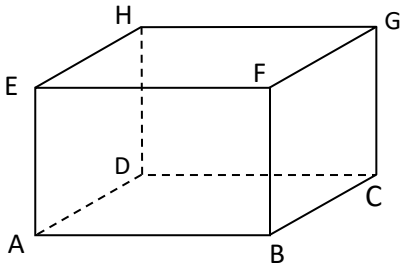
b) Quelle est la position relative des droites (FB) et (HE) ?

c) Quelle est la position relative des droites (FA) et (HI) ?

d) Quelle est la position relative des droites (GE) et (BJ) ?

3) On considère un tétraèdre $ABCD$.
On note I le milieu de [AD] et J le milieu de [DC].
On note K le point de [AB] tel que $AK = \frac{2}{3}AB$ et L le point de [BC] tel que $CL = \frac{2}{3}CB$
Quelle est la position relative des droites (IJ) et (KL) ?





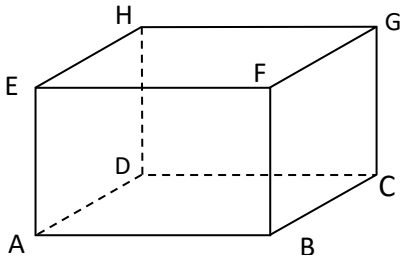
4) On considère un pavé droit $ABCDEFGH$.
On note I le milieu de [EH] et J le milieu de [EF].
a) Quelle est la position relative des droites (IJ) et (BD) ?
b) Quelle celle de la droite (CI) avec le plan (FBD) ?

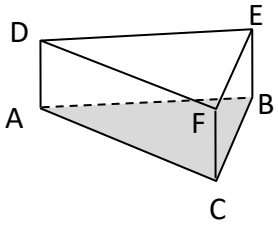
5) On considère le pavé droit $ABCDEFGH$.

a) Quelle est la position relative des droites (EF) et (GC) ?

b) Quelle est la position relative de (DF) et (BFH) ?

c) Quelle est la position relative de (AB) et (CF) ?



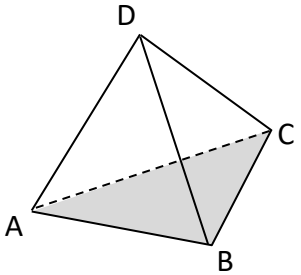


6) a. Dans le solide $ABCDEF$ ci-contre, les droites (AD) et (EB) sont parallèles.
D'autre part, le point C est dans les plans (DAF) et (FEB).
Quelle est la position relative des droite (FC), (AD) et (EB) ?

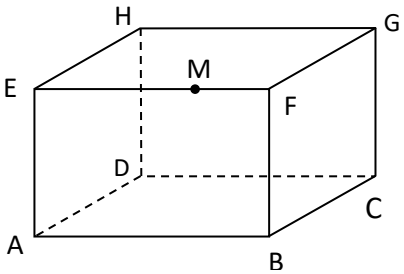
7) On considère le tétraèdre régulier $ABCD$. On note I le milieu de [AB].

a) Quelle est la position relative de la droite (AB) et du plan (DIC) ?

b) En déduire celle des droites (AB) et (CD).



8) $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
M est un point de l'arête [EF].
N est le point d'intersection de la droite (AB) et du plan (CGM).
Quelle est la position relative des droites (GM) et (CN) ?



Exercice 3 : Calcul de longueurs

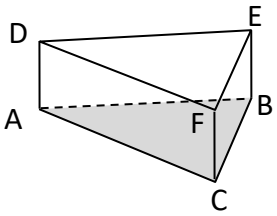
On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1.

a) Quelle est la position relative de la droite (HD) et du plan (EFG).

b) En déduire celle des droites (EG) et (HD).

c) En déduire que le triangle AEG est rectangle en E et calculer AG.

Exercice 4 : Utilisation d'aires et de volumes



1) Dans le prisme $ABCDEF$ ci-contre, le triangle DFE est rectangle en F.
On donne : $DF = 12$; $DE = 13$ et $DA = 3$.

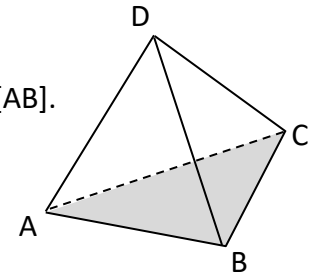
a) Calculer l'aire totale α de ce solide.

b) Calculer son volume V.

2) On considère le tétraèdre régulier $ABCD$ de côté 4. On note I le milieu de [AB].

a) Calculer la longueur ID et en déduire la surface totale de $ABCD$.

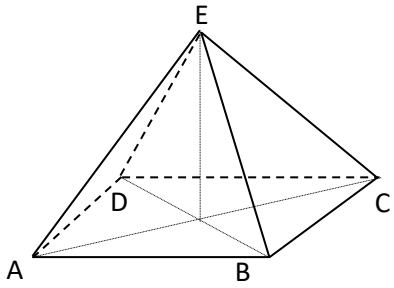
b) Sachant que son volume est égal à $V = \frac{32}{3\sqrt{2}}$, calculer sa hauteur h.

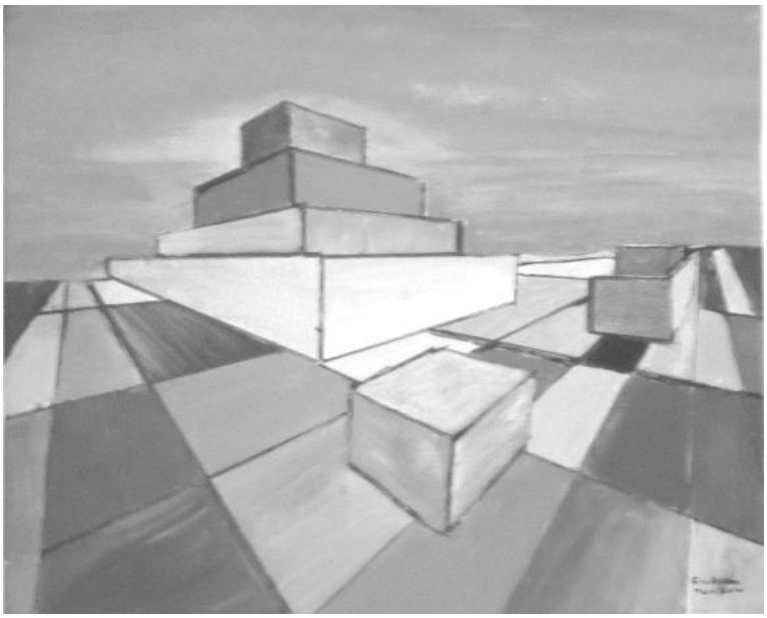


3) $ABCDE$ est une pyramide à base carrée. On appelle H l'intersection de (AC) et de (BD).
On donne : $AB = 6$ et $AE = 10$.

a) Calculer le volume de la pyramide.

b) Calculer sa surface totale.

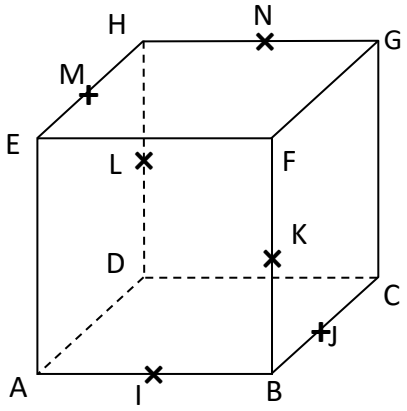




Savoirs Ve.2 : Repères et vecteurs dans l'espace

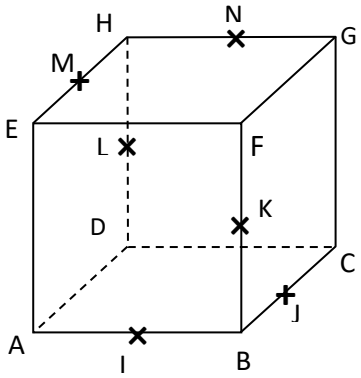
Exercice 5 : Repères dans un solide

1) ABCDEFGH est un cube et les points I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [BF], [DH], [HE] et [HG].



a) Dans le repère $(H; \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HD})$ donner (sans justification) :

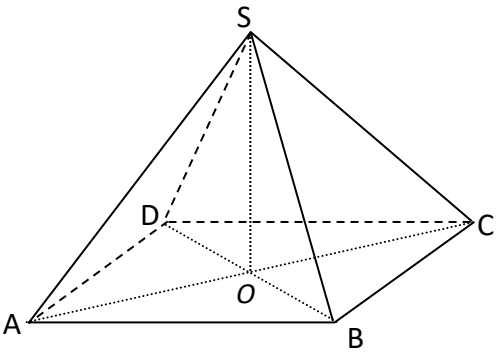
- les coordonnées des points A , G , C et E
- les coordonnées des points K et I
- les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HD}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{CD}$
- les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{IK}$



b) Dans le repère $(C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$ donner :

- les coordonnées des points D , E , H et A
- les coordonnées des points L et M
- les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CJ}$
- les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{LK}$

2) $SABCD$ est une pyramide régulière dont la base carrée a pour centre O. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CD] et [SA]
On admet que $OA = OB = OS$. Dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS})$ donner :



a) les coordonnées des points A , B , C, D et S

b) les coordonnées des points I, J et K

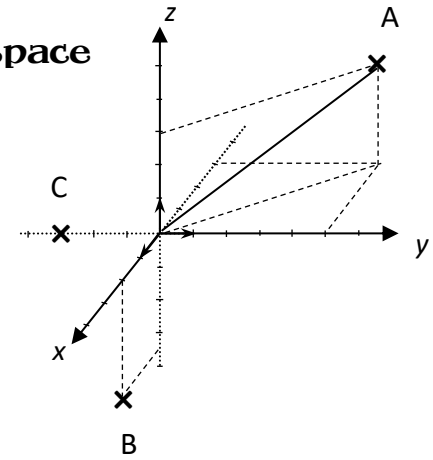
c) les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{SO}$

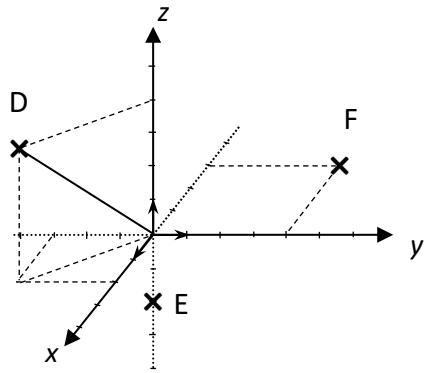
d) les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{IK}$

Exercice 6 : Repère dans l'espace

On munit l'espace d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et F



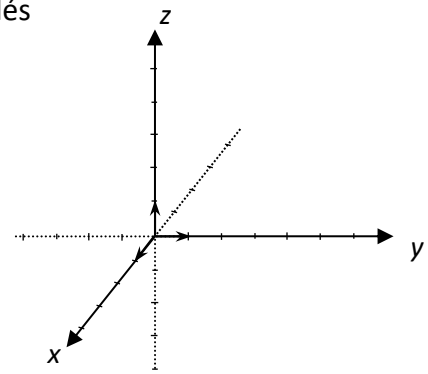


2) Représenter dans les repères les points demandés

M (0 ; 2 ; –3)

N (0 ; –1 ; 0)

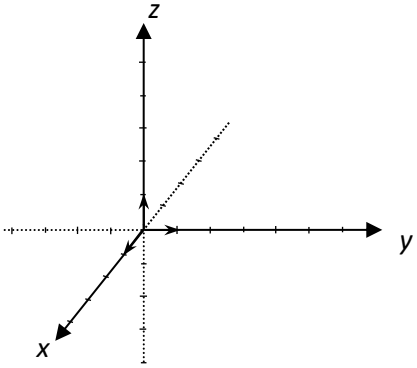
P (1 ; 4 ; 2)



Q (–3 ; 0 ; 0)

R (1 ; 4 ; –3)

S (1 ; –3 ; 0)



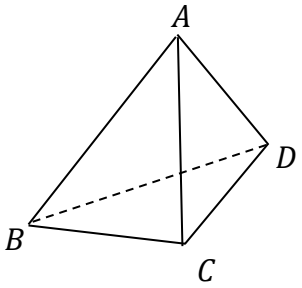
3) Dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on donne les points :
G (0 ; –5 ; 2) ; R (–1 ; 2 ; 4) ; I (2 ; 6 ; –3) ; B (–2 ; 0 ; 0) ; U (5 ; 0 ; – 4) ; L (2 ; 6 ; 1) et E (–1 ; –5 ; 0)
Les points A et Z sont les milieux respectifs des segments [BI] et [EG].

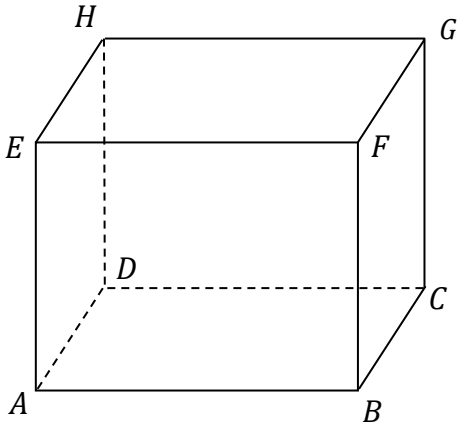
a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{LU}$ et $\overrightarrow{RE}$
b) Calculer les longueurs IG, BR et EU
c) Calculer les coordonnées des points A et Z
d) Calculer les coordonnées du point N tel que LUNE soit un parallélogramme

Exercice 7 : Relations vectorielles

1) Dans le tétraèdre régulier $ABCD$ ci-contre, placer les points M, N et P et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par les relations vectorielles :

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$\vec{u} = 2\overrightarrow{CB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$





2) On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

Construire le point M et le vecteur $\vec{u}$ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + 2\overrightarrow{GF}$$

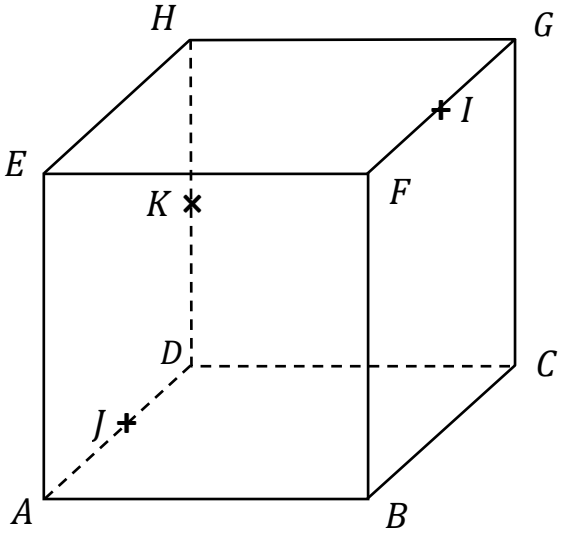
Construire les points P et R tels que :

$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{RA} - \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{EH}$

Exercice 8 : Petites démonstrations vectorielles

1) On considère le cube $ABCDEFGH$ où I, J et K sont les milieux respectifs des côtés $[FG]$, $[AD]$ et $[DH]$.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie ou fausse**. Chaque réponse doit être **justifiée**.

a) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{FG}$
b) $\overrightarrow{KB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{HF}$
c) $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{FH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{AE}$



2) Dans un autre cube $ABCDEFGH$, les points I, U et S sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AE]$ et $[CG]$ et les points Z et Y sont définis par : $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BY} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{IZ}$ et $\overrightarrow{IU}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$. Que peut-on en déduire sur les points U, I et Z ?

b) Montrer que $\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{BC}$. Que peut-on en déduire ?

3) $SABCD$ est une pyramide à base carrée de sommet S. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Le point M est défini par $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SD} + 3\overrightarrow{CJ}$

a) Montrer que $\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{CJ}$

b) En déduire que $\overrightarrow{JM} = 2\overrightarrow{JI}$. Que peut-on en conclure sur les points I, J et M ?

4) Dans le tétraèdre $ABCD$, les points I, J, K et L sont les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$. Qu'en déduit-on sur $IJKL$?

Savoirs Ve.3 : Colinéarité et parallélisme

Exercice 9 : Dans un repère

1) Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère les vecteurs :

$$\vec{u}(2; -8; 3);\ \vec{v}(-1; 4; -1{,}5);\ \vec{w}(4; -6; 1{,}5) \text{ et } \vec{a}\left(\frac{8}{3}; -4; 1\right)$$

a) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, donner leur relation de colinéarité.

b) Mêmes questions pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ et pour les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{a}$

2) Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère les points :

$$A\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right)\ ;\ B\left(0; \frac{5}{2}; -1\right)\ ;\ C\left(\frac{9}{2}; -\frac{13}{2}; 1\right) \text{ et } D\left(\frac{3}{4}; 1; 1\right)$$

a) Les points A, B, C sont-ils alignés ?

b) Le point A appartient-il à la droite (BD) ?

3) Soit $ABCD$ un tétraèdre. On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.
On définit les points M, N et P par les relations :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} \qquad \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

Les droites (MN) et (CP) sont-elles parallèles ?

Exercice 10 : Sans repère

1) On considère un tétraèdre $ABCD$. On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.

a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

b) Que peut-on en déduire sur les droites (AN) et (MC) ?

2) A, B et C sont trois points non alignés et D et E sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

a) Faire une figure

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

3) Soient M, N et P trois points de l'espace non alignés.
On considère les points I et J tels que $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$.

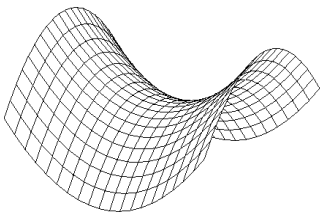
a) Faire une figure.

b) Montrer que le point P appartient à la droite (IJ).

4) On considère un pavé droit $ABCDEFGH$.
On note I et K les milieux respectifs des côtés $[AF]$ et $[FG]$, et J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$
Exprimer $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{DK}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$ et de $\overrightarrow{AK}$ et en déduire que les droites (JI) et (DK) sont parallèles.

Exercice 11 : Même chose en plus dur (un peu de recherche…)

A, B et C sont trois points non alignés.



a) E est défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Montrer que les points B, C et E sont alignés.

b) Soit a un réel non nul et F le point défini par $\overrightarrow{AF} = \frac{a-1}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{a}\overrightarrow{AC}$.

- Faire trois figures pour chacun des cas suivants : $a = 1$; $a = 2$ et $a = \frac{1}{2}$
- Démontrer que F appartient à la droite (BC)

Savoirs Ve.4 : Représentation paramétrique d'une droite

Exercice 12 : Dans un repère

1) Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par $R(3; -2; 0)$ et dirigée par $\vec{u}(-4; 0; 1)$

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (ST) où $S(1; -2; 4)$ et $T(3; -2; 0)$

3) Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a la droite d passant par $A(2; -1; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 2; -3)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de d.

b) Déterminer les coordonnées d'une autre point de d.

c) Le point $B(5; -7; 13)$ appartient-il à d ?

4) Dans un repère de l'espace, on considère les points $D(1; 3; 5)$ et $M(-2; -1; 1)$.

a) Déterminer la représentation paramétrique de la droite (DM).

b) Déterminer les coordonnées d'un 3ème point de (DM).

c) Soit $S(7; 11; 13)$. Les points D, M et S sont-ils alignés ?

5) Dans un repère de l'espace :

a) Donner l'équation paramétrée des axes (Ox) et (Oy)

b) Donner une représentation paramétrique de la droite parallèle à l'axe (Oy) passant par $A(1; 1; -1)$

Exercice 13 : Dans un solide

1) Dans le cube ABCDEFGH, on considère le repère orthonormé $\left(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$
Déterminer les représentations paramétriques des droites (DC), (AE); (FG) et (DB)

2) Dans un tétraèdre ABCD, on considère le repère orthonormé $\left(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)$
Déterminer les représentations paramétriques des droites (AC) et (AD)

3) Dans un cube ABCDEFGH on choisit le repère $(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. M et N sont les points définis par :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AF}$$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN)

Exercice 14 : À partir de représentations paramétriques de droites

1) Dans l'espace, une droite δ est définie par la représentation paramétrique $\delta : \begin{cases} x = 7 + \frac{1}{2}t \\ y = 4 - t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

a) Donner les coordonnées de deux points de la droite δ
b) Donner les coordonnées de deux vecteurs directeurs de la droite δ
c) Le point $Z(5; 8; 17)$ appartient-il à la droite δ ?

2) Dans un repère, on considère deux droites d et d' de représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -5 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } d' : \begin{cases} x = 5 - 4t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 2 - 6t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

a) Donner un vecteur directeur et un point pour chaque droite.
b) Les droites sont-elles parallèles ?

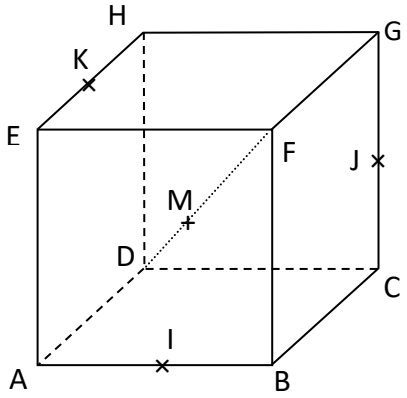
3) Déterminer la position relative des droites d et δ de représentations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 - 10t \\ z = -5 + \frac{1}{5}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \text{ et } d' : \begin{cases} x = 1 - 10\lambda \\ y = -1 + 25\lambda \\ z = -5 - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Savoirs Ve.5 : Coplanarité

Exercice 15 : Vecteurs directeurs d'un plan, bases et repères

1) Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, Les points I, J et K sont les milieux des côtés $[AB]$, $[CG]$ et $[HE]$ et M est le point défini par $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$

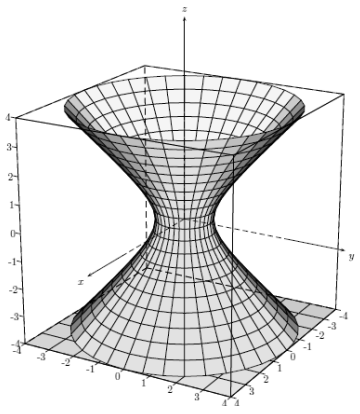


Donner deux bases possibles (chercher les plus différentes possibles…) pour chacun des plans suivants :

a) (ABE) **b)** (HFG) **c)** (EKJ) **d)** (DMI)

2) Dans le même cube, justifier que :

a) Les points D, M et J forment un plan.
b) $\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}\right)$ est une base de l'espace.
c) $\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{IC}\right)$ est une base du plan (ABC).
d) Le plan (EHC) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{CB}$.
e) On considère $\left(\overrightarrow{KF}, \overrightarrow{CI}, \overrightarrow{EG}\right)$. S'agit-il d'une base ?



Exercice 16 : Dans un repère

1) a) Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}(-1;2;3)$; $\vec{v}(7;8;-1)$ et $\vec{w}(5;12;5)$.
Calculer les coordonnées de $\vec{a}=2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$. Les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

2) Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{a}(4;-1;3)$; $\vec{b}(-2;2;0)$ et $\vec{c}(2;4;6)$.

a) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils colinéaires ?

b) Existe-t-il deux réels t et θ tels que $\vec{c}=t\vec{a}+\theta\vec{b}$? Que peut-on en conclure ?

3) On considère les points $A(0;1;-1)$; $B(2;1;0)$; $C(-3;-1;1)$ et $D(7;3;-1)$.

a) Vérifier que les points A, B et C forment un plan.

b) Calculer les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.

c) Qu'en déduit-on sur les points A, B, C et D ?

4) On considère les points $M(-2;2;-1)$; $N(2;0;3)$; $P(-2;0;0)$; $Q(0;-4;1)$ et $R(-2;-1;-2)$.

a) Vérifier que les points M, N et P ne sont pas alignés

b) Montrer que $\overrightarrow{QR}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{MN}+2\overrightarrow{MP}$

c) Qu'en déduit-on pour la droite (QR) ?

5) Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère les points

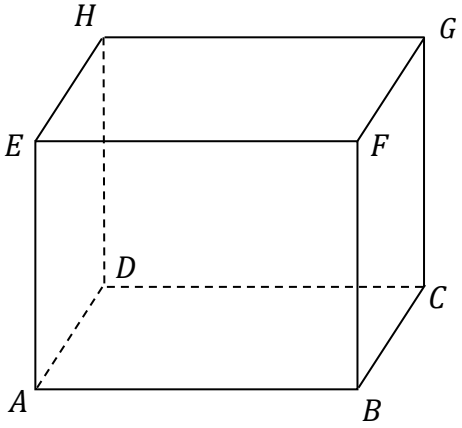
$$A\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};3\right)\ ;B\left(0;\frac{5}{2};-1\right)\ ;\ D\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};-1\right);\ E\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2};\ -9\right)\ \text{et}\ F\left(\frac{9}{2};\frac{5}{2};-1\right)$$

a) Les points A, B, D et E sont-ils coplanaires ?

b) Le point F appartient-il au plan (ABD) ?

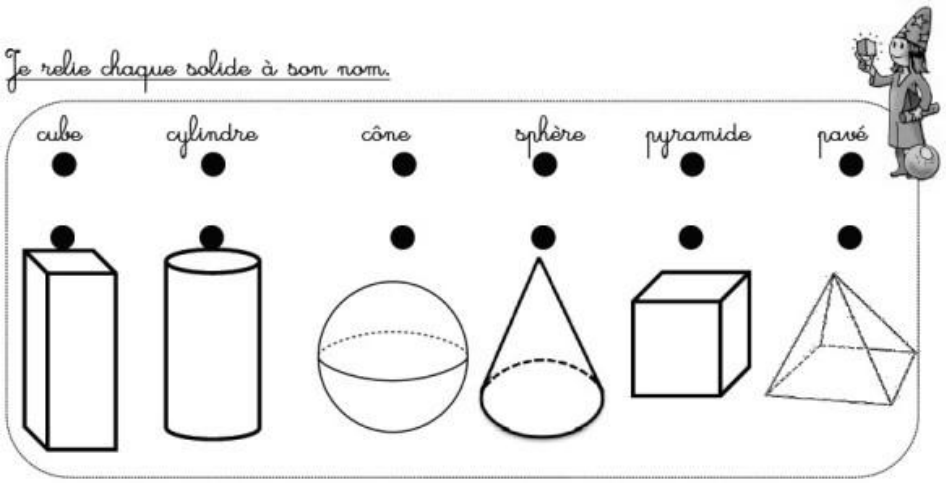
Exercice 17 : Sans repère

1) On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-contre.
On note I et J les milieux respectifs des côtés $[GH]$ et $[FG]$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.



2) On considère le tétraèdre $ABCD$. E est le milieu de $[BC]$ et F le point tel que $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AB}$
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

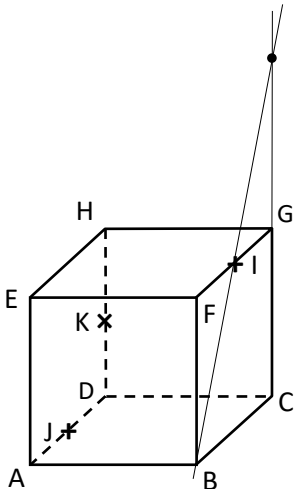
3) On considère le tétraèdre $ABCD$.
Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}$
Montrer que le point M appartient au plan (ABC)



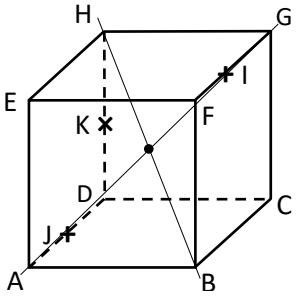
Corrections Savoir Ve.1

Corrigé Exercice 1

Toutes les justifications sont données pour explication.



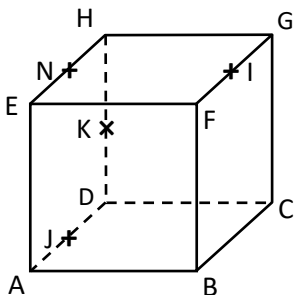
1) a) (IB) et (GC) : **sécantes**. Pour obtenir l'intersection, il faut prolonger ces deux droites.
En effet elles sont toutes les deux contenues dans le plan de la face BCGF et ne sont pas parallèles.



b) (HB) et (GA) : **sécantes**. Elles sont appelées les « grandes diagonales » du cube et leur **intersection est le centre du cube**. ('grandes' par rapport aux 'petites' diagonales des faces).
Les droites (HG) et (BA) sont strictement parallèles donc A∈(AGB) les droites (AG) et (HB) sont coplanaires et non parallèles, donc sécantes.

c) (JK) et (AH) : **strictement parallèles.**
Les 4 points appartiennent à la face EDHE, et J et K sont les milieux de [AD] et de [DH] donc (JK) est la droite des milieux dans le triangle ADH, et par conséquent parallèle au 3e côté [AH].

d) (GC) et (BA) : **non coplanaires.**
Car, par exemple, A ∉ (GBC). (Ce n'est pas demandé, mais elles sont orthogonales)

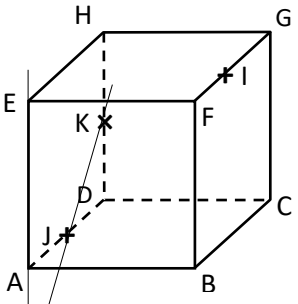


e) (IB) et (HJ) : **strictement parallèles.**
On introduit le milieu N de [HE] par exemple ; dans la face ADHE, il est facile de démontrer que (AN) // (HJ). De même, on peut démontrer que les points A, N, I et B sont coplanaires et que les droites (AN) et (BI) sont parallèles…
donc (BI) et (HJ) sont bien parallèles, puisque parallèles à une même 3e droite.
Démonstration pas évidente, mais elle sera plus simple dès qu'on aura les vecteurs… alors patientez un peu

f) (FD) et (GH) : **non coplanaires.**
Car, par exemple, D ∉ (FGH).

2) a) (EJ) et (HDA) : **(EJ) est contenue/incluse dans (HDA) :** $(\boldsymbol{EJ}) \subset (\boldsymbol{HDA})$**.**
E et J appartiennent à la face ADHE, E, J, H, D et A sont donc coplanaires.

Corrigé Exercice 1 *Suite*

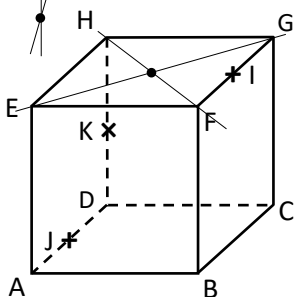


b) (JK) et (ABE) : **sécants.** Leur **intersection** est le point d'**intersection des droites (JK) et (AE).**

Les droites (JK) et (AE) sont sécantes (évident dans la face ADHE) et leur point d'intersection appartient à (JK) et au plan (ABE). Donc (JK) n'est pas parallèle à (ABE) et n'est pas incluse non plus, puisque ni J, ni K n'appartiennent à (ABE).

c) (IJ) et (AFG) : **(IJ) est incluse dans (AFG) :** $(IJ) \subset (AFG)$**.**

Le point D appartient au plan (AFG), donc (AD) ⊂ (AGF) et J ∈ (AGF).
Donc les point J et I appartiennent au plan (AGF)



d) (FH) et (ACE) : **sécants**. Leur intersection est le point d'intersection des droites (FH) et (GE), c'est-à-dire **le centre de la face EFGH.**

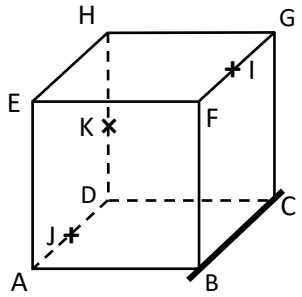
Le point G appartient au plan (ACE) et les droites (GE) et (FH) sont sécantes au centre de la face EFGH. Donc (FH) n'est pas parallèle à (ACE) et n'est pas incluse non plus, puisque ni H, ni F n'appartiennent à (ACE).

e) (IJ) et (ABE) : **strictement parallèles**.

Si on reprend le point N milieu de [HE]. La droite (IN) est parallèle à la droite (EF) qui est incluse dans (ABE) (évident dans la face EFGH) et la droite (JN) est parallèle à la droite (AE) incluse aussi dans (ABE) (évident dans la face ADHE).
Donc le plan (INJ) est parallèle au plan (ABE) et la droite (IJ) incluse dans (INJ) est donc bien parallèle à (ABE).
Encore une fois la démonstration sera beaucoup plus simple quand on aura les vecteurs.

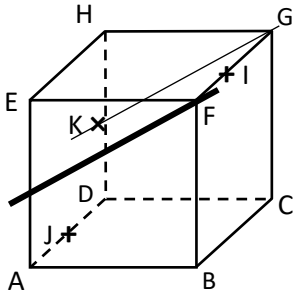
f) (EJ) et (BCG) : **strictement parallèles**.

On a (EJ) ⊂ (ADE) et les plans (ADE) et (BGC) sont parallèles (faces opposées).
Donc (EJ)// (BGC)



3) a) (ABJ) et (GIC) : **sécants selon la droite (BC)** (et même orthogonaux).

(ABJ) = (ABC) et (GIC) = (GBC) ces deux plans sont sécants et (BC) est contenue dans les deux.

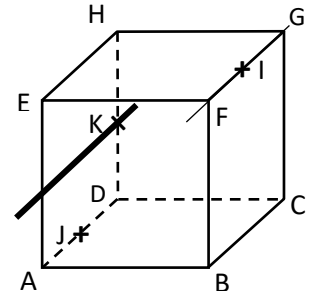


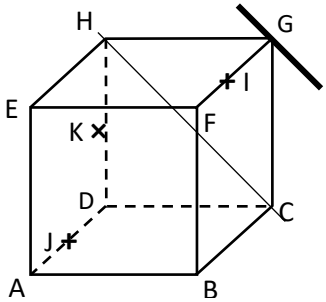
b) (KGI) et (ABE) : **sécants** et leur intersection est la **droite** de (ADE) **passant par F et parallèle à (GK).** (orthogonaux).

On a (KGC) // (ABE) or (KGI) et (KGC) sont sécants selon la droite(GK) contenue dans les deux plans. Donc (KGI) coupe (ABE) selon une droite parallèle à (GK).
Or le point F appartient aux plans (ABE) et (KGI), il appartient donc à leur intersection.

c) (KGI) et (EAD) : **sécants** et leur intersection est la **droite** de (ADE) **passant par K et parallèle à (GF).**

On a (GF) // (AD) avec (GF) ⊂ (KGI) et (AD) ⊂ (ADE). D'après le théorème du toit, la droite d'intersection est parallèle à (GF) et (AD).
Comme K appartient à (KGI) et à (ADE), il appartient à leur intersection.



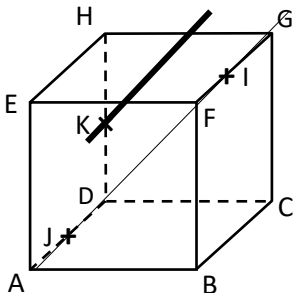


d) (EBG) et (HDC) : **sécants** et leur intersection est la **droite passant par G et parallèle à (HC).**

On a (EB) // (HC) avec (EB) ⊂ (EBG) et (HC) ⊂ (HDC). D'après le théorème du toit, la droite d'intersection est parallèle à (EB) et (HC). Comme G appartient à (EBG) et à (HDC), il appartient à leur intersection.

Corrigé Exercice 1 *Fin*

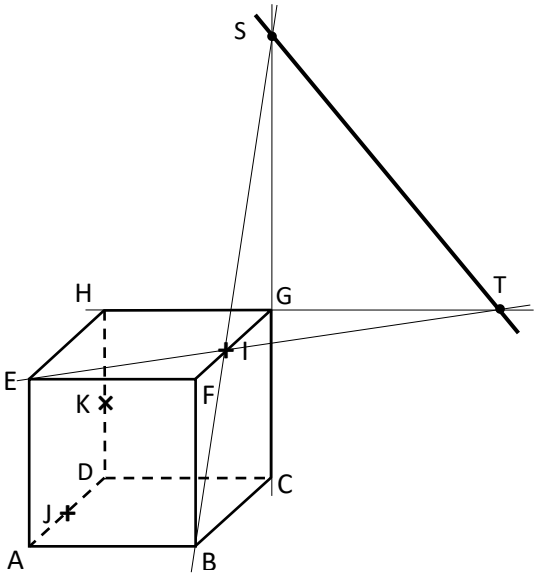
e) (IJK) et (HDC) : **sécants** et leur intersection est la **droite passant par K et parallèle à (GD)** (c'est-à-dire passant par le milieu de [HG])**.**



Les points A, J, D et G, I, F sont coplanaires, et on montre dans le rectangle ADGF que les droites (IJ) et (GD) sont parallèles.
On a donc (IJ) // (GD) avec (IJ) ⊂ (IJK) et (GD) ⊂ (HDC). D'après le théorème du toit, la droite d'intersection est parallèle à (IJ) et (GD).
Le point K appartient aux deux plans, donc il appartient à leur intersection.

f) (EBI) et (HDC) : **sécants** et leur intersection est **la droite passant par le point d'intersection de (BI) et (GC) et par le point d'intersection de (EI) et (HG).**

(BI) et (GC) sont coplanaires et sécantes, appelons S leur point d'intersection. S appartient donc aux plans (EBI) et (HDC). De même (EI) et (HC) sont coplanaires et sécantes, appelons T leur point d'intersection. T appartient donc aux plans (EBI) et (HDC). Les plans (EBI) et (HDC) sont donc sécants selon la droite (ST).



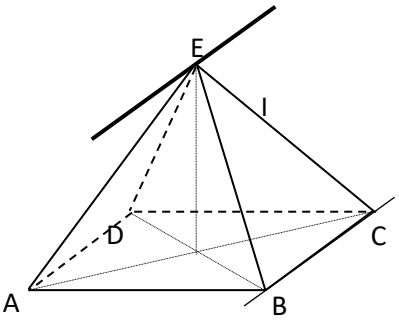
4) a) Les droites (HJ) et (EA) sont coplanaires, dans le plan de la face ADHE. Elles ne sont pas parallèles (K ∈ (HD) et (HD) // (AE) mais J∉ (HD)). **Donc les droites (HJ) et (EA) sont sécantes.**

b) Les points H, J et E sont coplanaires, dans le plan de la face ADHE. Mais C ∉ (HJE). **Donc les droites (HJ) et (EC) ne sont pas coplanaires**

c) Dans un cube, les faces opposées sont parallèles, donc $(AEH)//(BFG)$. Le plan (AHG) croise les plans (AEH) et (BFG) en (AH) et (GB) donc **les droites** $(\boldsymbol{AH})$ **et** $(\boldsymbol{GB})$ **sont parallèles**.

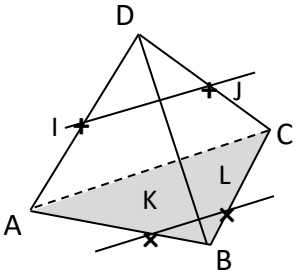
Corrigé Exercice 2

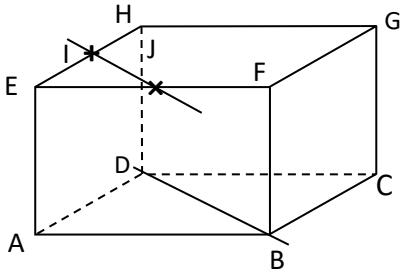
1) (BC) // (AD), donc la droite (BC) est parallèle à tout plan contenant (AD), donc **parallèle au plan (AED)**
On a (IBC) = (EBC). Le point E appartient aux plans (AED) et (IBC), il appartient donc à leur intersection.
Par ailleurs, (AD) // (BC) donc, d'après le théorème du toit, l'intersection de (EAD) et de (IBC) est parallèle aux droite (AD) ou (BC)
Il s'agit donc de la **droite passant par E et parallèle à (BC) [**ou (AD)**]**



2) a) (JE) ⊥ (EA) et (JE) ⊥ (ED), donc (JE) est orthogonale au plan (AED) et par conséquent à toute droite de ce plan, en particulier, comme (CD) ⊂ (AED), les droites (JE) et (CD) sont orthogonales.
b) (FB) et (HE) sont **non coplanaires**. En effet E n'est pas dans le plan (FBH).
c) (FA) ⊥ (FJ) et (FA) ⊥ (FG), donc (FA) est orthogonale au plan (FGJ) et par conséquent à toute droite de ce plan, en particulier, comme (HI) ⊂ (FGJ), les droites (FA) et (HI) sont orthogonales.
d) (GE) et (BJ) sont sécantes : en effet elles ne sont pas parallèles tout en étant coplanaires, puisque E est dans le plan (BGJ).

3) Dans la face ADC, (IJ) est la droite des milieux et donc parallèle au 3ème côté (AC).
Dans la face (ABC), on a $\frac{BK}{BA} = \frac{1}{3}$ et $\frac{BL}{BC} = \frac{1}{3}$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, la droite (KL) est parallèle à la droite (AC).
Les droites (IJ) et (LK) sont toutes deux parallèles à (AC), et sont donc **parallèles entre elles.**





4) a) On a $(IJ) \subset (HEF)$ et dans le triangle HEF, (IJ) est la droite des milieux parallèle au 3e côté (HF).
Or les droites (HF) et (DB) sont parallèles (intersections des deux plans parallèles (EHF) et (ABD) par le plan (HFD))
Donc (IJ) est parallèle à (BD).
b) (CI) et (FBD) sont sécants.

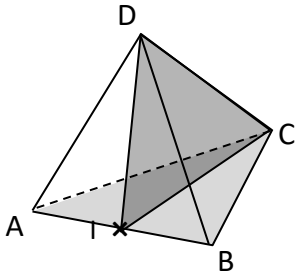
5) a) Par exemple, on a (EF) // (HG) et (HG) ⊥ (GC) donc **(EF) et (GC) sont orthogonales.**

b) (DF) est incluse dans (BFH). En effet, le plan (BFH) passe par les points F et D.
c) (AB) est orthogonale au plan (BFC)*, elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier **(AB) est orthogonale à (CF).**

* Si vous n'en êtes pas convaincus, (AB) ⊥ (FB) et (AB) ⊥ (BC), c'est-à-dire qu'elle est orthogonale à deux droite du plan (FBC), donc orthogonale au plan (FBC)

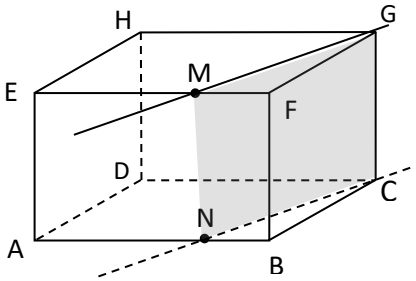
6) a. Les plans (CAD) et (CBE) sont sécants selon la droite (CF). Comme les droites (AD) et (EB) sont parallèles, d'après le **théorème du toit**, la droite d'intersection (CF) leur est aussi parallèle.

7) a) Le tétraèdre est régulier, donc ses 4 faces sont des triangles équilatéraux.
Dans le triangle ABD, la droite (DI) est donc médiane mais aussi hauteur issue de D, et on a (AB) ⊥ (DI).
Dans le triangle ABC, la droite (CI) est donc médiane mais aussi hauteur issue de C, et on a (AB) ⊥ (CI).
Donc la droite (AB) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (CDI), **elle est donc orthogonale à (DIC)**



8) (AB) est orthogonale à (DIC) elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier, **les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.**

b. (GM) est la droite d'intersection des plans (CGM) et (EFG)
(CN) est la droite d'intersection des plans (CGM) et (ABC).
Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles, donc le plan (CGM) les coupent selon des droites parallèles.
On a bien (GM)//(CN)



Corrigé Exercice 3

a) (HD) ⊥ (HE) et (HD) ⊥ (HG), donc (HD) est orthogonale au plan (HEG) qui est le plan (EFG)

b) (HD) est orthogonale à (EFG) elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier, les droites (EG) et (HD) sont orthogonales.

c) (AE) // (HD) et (HD) est orthogonale à (EG) donc (AE) est orthogonale à (EG). Comme les points A, E et G sont coplanaires, AEG est bien un triangle rectangle en E.
D'après le théorème de Pythagore, on a $AG^2 = AE^2 + EG^2$
On peut par ailleurs, calculer EG dans le triangle rectangle EGF,
on a $EG^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ Donc $AG^2 = 1^2 + 2 = 3$ et **AG = $\sqrt{3}$**

À retenir :
La diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$
La grande diagonale d'un cube de côté 1 mesure $\sqrt{3}$

Corrigé Exercice 4

1) a) Pour calculer l'aire de DEF, il nous faut calculer FE.
Dans le triangle DEF, on a $DE^2 = DF^2 + FE^2 \Rightarrow FE = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.
Ainsi l'aire de DEF vaut $A_T = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$.
Ainsi l'aire totale de $ABCDEF$ est $\alpha = 2 \times 30 + 12 \times 3 + 13 \times 3 + 5 \times 3 = 60 + 36 + 39 + 15 = 150$.
b) $V = \frac{1}{3} A_T \times DA = 30$.

2) a) Le triangle AID est rectangle en I donc $AD^2 = AI^2 + ID^2 \Rightarrow ID = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
L'aire d'une face du tétraèdre est donc égale à : $A_f = \frac{1}{2} AB \times ID = 4\sqrt{3}$.
b) Le tétraèdre est une pyramide à base triangulaire, donc son volume est donné par :

$$V = \frac{1}{3} A_f \times h \Leftrightarrow \frac{32}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3} 4\sqrt{3}\ h \qquad \Rightarrow h = \frac{3 \times 32}{3\sqrt{2} \times 4\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

3) a) Pour calculer le volume V_P de la pyramide, il faut calculer l'aire de base carrée A_c et sa hauteur EH.
On a d'une part : $A_c = 6^2 = 36$.
D'autre part, dans le triangle rectangle AHB : $AH^2 + HB^2 = AB^2 = 16 \Rightarrow AH^2 = 8 \Rightarrow AH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Dans le triangle rectangle EHA : $AE^2 = EH^2 + HA^2 \Rightarrow 100 = EH^2 + 8 \Rightarrow EH = \sqrt{92} = 2\sqrt{23}$.
Donc enfin :

$$V_P = \frac{1}{3} A_c \times EH = \frac{1}{3} \times 36 \times 2\sqrt{23} = 24\sqrt{23}$$

b) Soit I le milieu de $[AB]$.
Dans le triangle rectangle AIE, on a : $AE^2 = AI^2 + IE^2 \Rightarrow 100 = 9 + IE^2 \Rightarrow IE = \sqrt{91}$.
Ainsi l'aire d'une face triangulaire est :

$$A_f = \frac{1}{2} \times IE \times AB = \frac{1}{2} 6\sqrt{91} = 3\sqrt{91}$$

La surface totale vaut donc :

$$S_P = 36 + 4 \times 3\sqrt{91} = 36 + 12\sqrt{91} = 12\left(3 + \sqrt{91}\right)$$

Corrections Savoir Ve.2

Corrigé Exercice 5

1) a) $A(1;0;1)$, $G(0;1;0)$, $C(0;1;1)$ *et* $E(1;0;0)$

$$K\left(1;1;\frac{1}{2}\right) \text{ et } I\left(1;\frac{1}{2};1\right)$$

$$\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

b) $D(0;1;0)$, $E(1;1;1)$, $H(0;1;1)$ *et* $A(1;1;0)$ $L\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$ $M\left(\frac{1}{2};1;1\right)$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

2) a) $A\ (1;0;0), B(0;1;0)$, $C(-1;0;0), D(0;-1;0)$ *et* $S(0;0;1)$

b) $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ $J\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ $K\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$

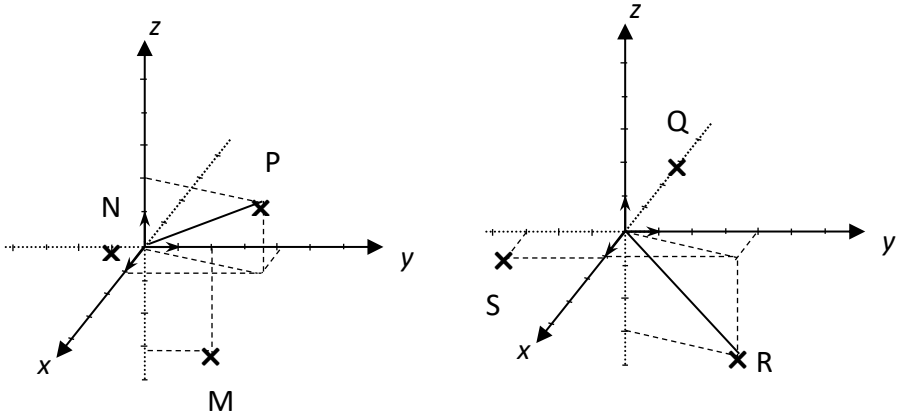
c) $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SO}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Corrigé Exercice 6

1) $A(-3\ ;\ 5\ ;\ 3)$
$B\ \left(2\ ;\ 0\ ;-\frac{7}{2}\right)$
$C\ (0\ ;-3\ ;\ 0)$
$D\ (2\ ;\ -3\ ;\ 4)$
$E\ (0\ ;\ 0\ ;-2)$
et $F\ (-3\ ;\ 4\ ;\ 0)$

2)



3) a) $\overrightarrow{GB}=\begin{pmatrix}x_B-x_G\\y_B-y_G\\z_B-z_G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-0\\0-(-5)\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{5}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}$ de même : $\overrightarrow{LU}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{-6}\\\mathbf{-5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RE}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-7}\\\mathbf{-4}\end{pmatrix}$

b) $GI=\sqrt{(x_I-x_G)^2+(y_I-y_G)^2+(z_I-z_G)^2}=\sqrt{2^2+11^2+(-5)^2}=\sqrt{4+121+25}=\sqrt{\mathbf{150}}$

de même $BR=\sqrt{\mathbf{21}}$ et $EU=\sqrt{\mathbf{77}}$

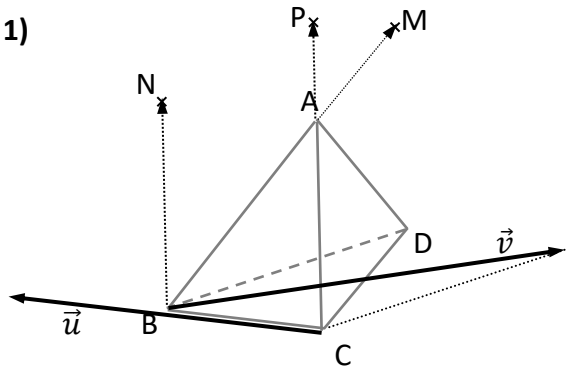
c) $A\left(\frac{x_B+x_I}{2}\ ;\frac{x_B+x_I}{2}\ ;\ \frac{x_B+x_I}{2}\right)\Rightarrow\ A\left(\frac{-2+2}{2}\ ;\frac{0+6}{2}\ ;\ \frac{0-3}{2}\right)\Rightarrow \boldsymbol{A\left(0\ ;\ 3\ ;\ -\frac{3}{2}\right)}$ de même $\boldsymbol{Z\ (-\frac{1}{2}\ ;\ -5\ ;\ 1)}$

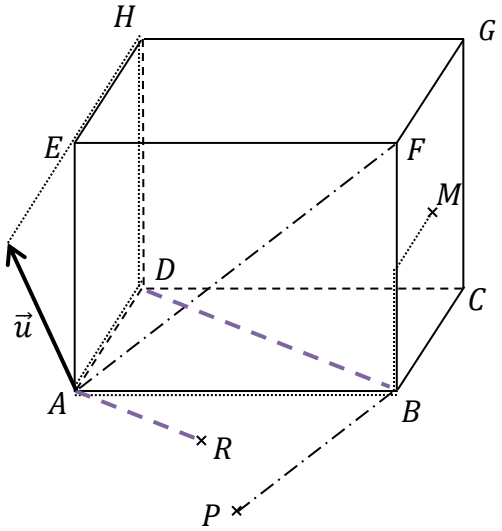
d) LUNE parallélogramme $\Leftrightarrow\ \overrightarrow{EN}=\overrightarrow{LU}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x+1\\y+5\\z-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\-5\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x+1=3\\y+5=-6\\z=-5\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=2\\y=-11\\z=-5\end{cases}$

On a donc $\boldsymbol{N(2;-11;-5)}$

Corrigé Exercice 7

1)





2) Pour construire les points P et R, quelques manipulations vectorielles habituelles…

$$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BF} \Leftrightarrow \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BF}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$$
$$\overrightarrow{RA}-\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{EH} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EH}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AR}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$$

Corrigé Exercice 8

1) **a)** On a $\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{CE}$.
L'affirmation est **VRAIE**.

b) On a $\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{BD}\neq\overrightarrow{KB}$.
L'affirmation est **FAUSSE**.

b) On a $\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{FH}-\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{IH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{KH}+\overrightarrow{HD}$.
$=\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{IK}$ ⇒ L'affirmation est **VRAIE**.

2) **a)** $\overrightarrow{IZ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AZ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}+\boldsymbol{\overrightarrow{AE}}$
et $\overrightarrow{IU}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AU}=-\boldsymbol{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}+\boldsymbol{\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}}$
On a donc $\boldsymbol{\overrightarrow{IU}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IZ}}$ ⇒ $\boldsymbol{U}$ **est le milieu de** $[\boldsymbol{IZ}]$.

b) $\overrightarrow{ZY}=\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BY}=-\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$
$=-\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
$=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
$=\boldsymbol{\overrightarrow{BC}}$ CQFD ⇒ Le quadrilatère $ZYCB$ est un **parallélogramme**

3) a) $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SD}+3\overrightarrow{CJ}=3\overrightarrow{CJ}$ CQFD

b) $\overrightarrow{JM}=\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{JD}+3\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CJ}=2\overrightarrow{BI}+2\overrightarrow{JB}=2\overrightarrow{JI}$. CQFD
Les points I, J et M sont alignés et $\boldsymbol{I}$ **est le milieu de [JM]**

4) Dans le triangle ABC, (IJ) est une droite des milieux, donc $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
Dans le triangle DCA, (LK) est une droite des milieux, donc $\overrightarrow{LK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ⇒ On a bien $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$.
Le quadrilatère IJKL est un **parallélogramme** (on peut y arriver plus lentement avec plein de manipulations…)

Corrections Savoir Ve.3

Corrigé Exercice 9

1) a) $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{2}{-1} = -2$; $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = \frac{-8}{4} = -2$ *et* $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} = \frac{3}{-1{,}5} = -2$

On a ainsi : $\boldsymbol{\vec{u} = -2\vec{v}}$ (ou $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$) donc les vecteurs sont colinéaires.

b) $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{w}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{w}}} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3} \neq \frac{1}{2}$ donc $\boldsymbol{\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} \neq \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}}}$ et les vecteurs ne sont pas colinéaires

$\frac{x_{\vec{w}}}{x_{\vec{a}}} = 4 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$; $\frac{y_{\vec{w}}}{y_{\vec{a}}} = -\frac{6}{-4} = \frac{3}{2}$ et $\frac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{a}}} = \frac{1{,}5}{1} = \frac{3}{2}$ donc $\boldsymbol{\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{a}}$ (ou $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{w}$)
donc les vecteurs sont colinéaires

2) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{-13}{2} + \frac{1}{2} \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ Or $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2}$; $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{-4}{-2} = 2 \neq -\frac{1}{2}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les **points A, B, C ne sont pas alignés.**

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - 0 \\ 1 - \frac{5}{2} \\ 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ On remarque que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{BD}$ donc les vecteurs sont colinéaires et les points A, B et D sont alignés : **le point A appartient à la droite (BD)**

3) Dans le repère donné, on a : $M(1; 0; -2)$ D'autre part, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$
Donc $N(2; 1; -2)$ et enfin $P(2; 3; 0)$. D'autre part $C(0; 1; 0)$.
Ainsi : $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CP}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{MN}$: les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et (CP) sont parallèles.

Corrigé Exercice 10

1) a) **<u>1re méthode :</u>** On a d'une part : $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Et d'autre part : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

On a $\boldsymbol{\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MC}}$ donc les vecteurs sont **colinéaires**. *(Évidemment, on peut les décomposer en fonctions d'autres vecteurs… mais on doit trouver la même relation de colinéarité)*

<u>2e méthode :</u> On utilise par exemple le repère $\left(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)$. Dans ce repère, on a :

$$M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right) \quad C(0; 1; 0) \quad A(1; 0; 0) \quad \overrightarrow{CN}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on retrouve effectivement que $\boldsymbol{\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MC}}$ avec la même conclusion.

b) Les droites (AN) et (MC) sont **parallèles**

2) On a d'une part : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$
Et d'autre part : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ On a donc $\boldsymbol{\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{CE}}$
Les vecteurs sont colinéaires donc les points **C, D et E sont alignés**

3) D'une part : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MP} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$
Et d'autre part : $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MI} = -\overrightarrow{MP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$. On a alors $\boldsymbol{\overrightarrow{IJ} = -3\overrightarrow{PI}}$ Les vecteurs sont colinéaires, donc les points I, J et P sont alignés : **le point $\boldsymbol{P}$ appartient à la droite $(\boldsymbol{IJ})$.**

4) $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$
Donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$ et on a $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK}$ Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DK}}$
Les vecteurs sont colinéaires, donc **les droites $(\boldsymbol{JI})$ et $(\boldsymbol{DK})$ sont parallèles.**

Corrigé Exercice 11

a) On a : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
Donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et **les points B, C et E sont alignés**

b) Quand $a = 1$ le point F est confondu avec le point C ; quand $a = 2$ le point F est le milieu de [BC] et $a = \frac{1}{2}$ Le point F est tel que C soit le milieu de [FB]
On a : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \frac{a-1}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{a}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{a}\overrightarrow{AC} = \vec{0} + \frac{1}{a}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{a}\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{\frac{1}{a}\overrightarrow{BC}}$
Les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et les points B, C et F sont alignés : **F appartient à la droite (BC)**

Corrections Savoir Ve.4

Corrigé Exercice 12

1) $d : \begin{cases} x = 3 - 4\boldsymbol{t} \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

2) On a $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de (ST) donc, en choisissant le point S : $(ST) : \begin{cases} x = 1 + 2\boldsymbol{t} \\ y = -2 \\ z = 4 - 4\boldsymbol{t} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Mais si vous choisissez T, on trouve une autre représentation (aussi bonne) $(ST) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 \\ z = -4t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

3) a) $d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2\boldsymbol{t} \\ z = 4 - 3\boldsymbol{t} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

b) Selon la valeur de t que vous allez choisir, vous allez trouver des points différents. Par exemple : pour $t = 1$ on trouve le point $\boldsymbol{M_1(1; 1; 1)}$ mais pour $t = 2$ on trouve $M_2(0; 3; -2)$ etc..

c) $\begin{cases} 5 = 2 - t \\ -7 = -1 + 2t \\ 13 = 4 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ -6 = 2t \\ 9 = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ -3 = t \\ -3 = t \end{cases}$

Le système admet une solution, donc **le point $\boldsymbol{B}$ appartient à $\boldsymbol{d}$**

4) **a)** On a $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}-3\\-4\\-4\end{pmatrix}$ donc, avec le point D, on obtient $(DM):\begin{cases}x=1-3\boldsymbol{t}\\y=3-4\boldsymbol{t}\\z=5-4\boldsymbol{t}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

b) Par exemple : pour t $=1$ on trouve le point $\mathrm{P}_1(-2;-1;1)$; pour t $=-1$ on trouve $\mathrm{P}_2(4;7;9)$ etc..

c) Vérifions si les coordonnées de S est une solution du système : $\begin{cases}7=1-3t\\11=3-4t\\13=5-4t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6=-3t\\8=-4t\\8=-4t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\t=-2\\t=-2\end{cases}$

Le système admet une solution donc le point S appartient à la droite (DM), les points $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{M}$ **et** $\boldsymbol{S}$ **sont alignés**

5) a) l'axe (Ox) a pour vecteur directeur $\vec{\imath}(1;0;0)$ et (Oy) a pour vecteur directeur $\vec{\jmath}(1;0;0)$ et les deux passent par le point O. Donc $(\boldsymbol{Ox}):\begin{cases}x=t\\y=\boldsymbol{0}\\z=\boldsymbol{0}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ et $(\boldsymbol{Oy}):\begin{cases}x=\boldsymbol{0}\\y=\boldsymbol{t}\\z=\boldsymbol{0}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

b) $d:\begin{cases}x=\boldsymbol{1}\\y=\boldsymbol{1}+\boldsymbol{t}\\z=-\boldsymbol{1}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

Corrigé Exercice 13

1) Droite (DC) passant par $D(0;0;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $:\begin{cases}x=\boldsymbol{0}\\y=\boldsymbol{t}\\z=\boldsymbol{0}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

Droite (AE) passant par $A(1;0;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $:\begin{cases}x=\boldsymbol{1}\\y=\boldsymbol{0}\\z=\boldsymbol{t}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

Droite (FG) passant par $F(1;1;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $:\begin{cases}x=\boldsymbol{1}-\boldsymbol{t}\\y=\boldsymbol{1}\\z=\boldsymbol{1}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

et droite (DB) passant par $D(0;0;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $:\begin{cases}x=\boldsymbol{t}\\y=\boldsymbol{t}\\z=\boldsymbol{0}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

2) (AC) passe par $A(0;0;1)$ et vecteur directeur $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ donc $:\begin{cases}x=\boldsymbol{t}\\y=\boldsymbol{0}\\z=\boldsymbol{1}-\boldsymbol{t}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

(AD) passe par $A(0;0;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $:\begin{cases}x=\boldsymbol{0}\\y=\boldsymbol{t}\\z=\boldsymbol{1}-\boldsymbol{t}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

3) On a $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{2};\boldsymbol{0};-\boldsymbol{1})$

et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{3};\boldsymbol{0};\boldsymbol{2})$

La droite (MN) passe par $M(2;0;-1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ donc $:\begin{cases}x=\boldsymbol{2}+\boldsymbol{t}\\y=\boldsymbol{0}\\z=-\boldsymbol{1}+\boldsymbol{3t}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

Corrigé Exercice 14

1) a) Par exemple : pour $t = 0$ on trouve le point $\boldsymbol{A(7;4;-5)}$ et pour $t = 2$ on trouve le point $\boldsymbol{B(8;2;1)}$

b) Un vecteur est $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\3\end{pmatrix}$ et on peut choisir n'importe quel vecteur colinéaire à $\vec{u}$ par ex. : $\vec{\boldsymbol{v}}\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix} = 2\vec{u}$

c) On cherche s'il y a une solution au système : $\begin{cases}5 = 7 + \frac{1}{2}t\\8 = 4 - t\\17 = -5 + 3t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2 = \frac{1}{2}t\\4 = -t\\22 = 3t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4 = t\\-4 = t\\\frac{22}{3} = t\end{cases}$

Le système n'a pas de solution, donc le point $\boldsymbol{Z(5;8;17)}$ **n'appartient pas à la droite $\boldsymbol{\delta}$**

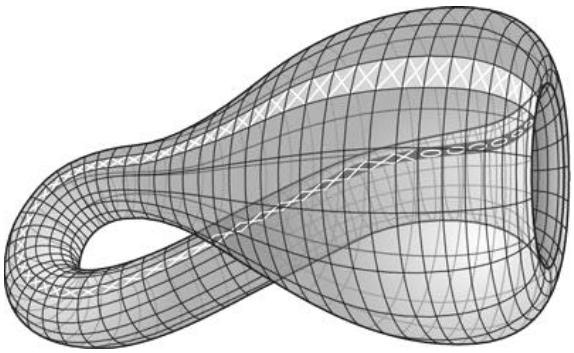
2) a) La droite d passe par le point $\boldsymbol{A(-3;-5;3)}$ et a comme vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{2;-1;3})$
et la droite d' passe par le point $\boldsymbol{B(5;1;2)}$ et a comme vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{-4;2;-6})$

b) On remarque que $\vec{\boldsymbol{v}} = -2\vec{\boldsymbol{u}}$: leurs vecteurs directeurs étant colinéaires, les **droites sont parallèles**

3) La droite d passe par le point $\boldsymbol{A(1;-1;-5)}$ et a comme vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}\left(\boldsymbol{4;-10;\frac{1}{5}}\right)$ et la droite d' passe par le même point $\boldsymbol{A(1;-1;-5)}$ et a comme vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{v}}\left(\boldsymbol{-10;25;-\frac{1}{2}}\right)$

On a $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$; $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = \frac{-10}{25} = -\frac{2}{5}$ *et* $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} = \frac{1/5}{-1/2} = -\frac{2}{5}$ donc $\boldsymbol{\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}}$ et les vecteurs directeurs des droites sont colinéaires : les droites $\boldsymbol{d}$ **et** $\boldsymbol{d'}$ **sont parallèles**.

Comme elle ont un **point commun**, le point A, elles sont donc **confondues**



Corrections Savoir Ve.5

Corrigé Exercice 15

1) a) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BF}\right)$ (ou $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BF}\right)$, $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}\right)$ …)

b) $\left(\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HF}\right)$ et $\left(\overrightarrow{HE},\overrightarrow{GE}\right)$ etc.

c) $\left(\overrightarrow{EK},\overrightarrow{EJ}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{KJ}\right)$ etc.

d) $\left(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DI}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{MI}\right)$ etc.

2) a) J n'appartient pas à la droite (DM) donc les points **D, M et J ne sont pas alignés et forment un plan**

b) I n'est pas dans le plan (DHC) donc **les points D, I, C, H ne sont pas coplanaires et ainsi** $\left(\overrightarrow{DI};\overrightarrow{DH};\overrightarrow{DC}\right)$ **est bien une base de l'espace**

c) $I \in [AB] \Rightarrow I \in (ABC)$. De même D est dans la face $ABCD$ donc $D \in (ABC)$.
Les points D, I et C sont donc dans (ABC) donc les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont dans la direction de (ABC).
Enfin **ils ne sont pas colinéaires**, donc ils forment une base du plan (ABC).

d) On a bien sûr : $C \in (EHC)$ $(EH)//(BC)$ donc $H \in (EHC)$ et $K \in (EH) \Rightarrow K \in (EHC)$.
Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont dans la direction du plan (EHC).
Enfin **ils ne sont pas colinéaires**, donc ils sont effectivement des vecteurs directeurs de (EHC).

e) $\overrightarrow{KF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont dans le plan (EFG) et $(CI)//(EFG)$ donc $\overrightarrow{KF}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont coplanaires. $\left(\overrightarrow{KF},\overrightarrow{CI},\overrightarrow{EG}\right)$ n'est donc pas une base.

Corrigé Exercice 16

1) a) $\vec{a} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = 2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\8\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\12\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+7-5\\4+8-12\\6-1-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$

On a donc $2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}}$ Donc les vecteurs $\boldsymbol{\vec{u}, \vec{v}}$ **et** $\boldsymbol{\vec{w}}$ **sont coplanaires**

2) a) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne peuvent pas être proportionnelles ($z_{\vec{b}} = 0$ alors que $z_{\vec{a}} \neq 0$)

b) On cherche à résoudre le système $\vec{c} = t\vec{a} + \theta\vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2 = 4t - 2\theta\\4 = -t + 2\theta\\6 = 3t\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2 = 8 - 2\theta\\4 = -2 + 2\theta\\t = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\theta = 3\\\theta = 3\\t = 2\end{cases}$ On a donc $\boldsymbol{\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}} \Rightarrow$ Les vecteurs $\boldsymbol{\vec{a}, \vec{b}}$ **et** $\boldsymbol{\vec{c}}$ **sont coplanaires**

Autrement dit, $\boldsymbol{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$ **forme une base**.

3) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$ or a $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = -\frac{2}{3}$; $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = 0 \neq -\frac{2}{3}$

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires : les points A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un plan.

b) $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = 2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+3-7\\0+2-2\\2-2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

c) Donc $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ Les vecteurs sont coplanaires et donc **les points A, B, C et D sont coplanaires**

4) a) $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ or a $\frac{x_{\overrightarrow{MP}}}{x_{\overrightarrow{MN}}} = 0$; $\frac{y_{\overrightarrow{MP}}}{y_{\overrightarrow{MN}}} = 1 \neq 0$

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires : les points M, N et P ne sont pas alignés et forment donc un plan.

b) On a $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-6\\6\end{pmatrix}$ On a donc $\boldsymbol{\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{QR}}$

Les vecteurs sont coplanaires

c) La droite **(QR) est parallèle au plan (MNP)** (soit strictement parallèle, soit incluse)

5) a) Attention : 2 étapes ! d'abord montrer que 3 des points ne sont pas alignés et donc forment un plan ; ensuite démontrer que le 4ème point est coplanaire

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$ or a $\frac{x_{\overrightarrow{AD}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = 0$; $\frac{y_{\overrightarrow{AD}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = 1 \neq 0$

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires : les points **A, B et D ne sont pas alignés et forment donc un plan.**

$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}-3\\3\\-12\end{pmatrix}$ et on cherche x et y tels que $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3\\3\\-12\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\3\\-4\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{3}{2}x = -3\\3x + 3y = 3\\-4x - 4y = -12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2\\6 + 3y = 3\\-8 - 4y = -12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2\\y = -1\\y = +1\end{cases}$

Donc le système n'a pas de solution, les vecteurs ne sont PAS coplanaires et par conséquent, **les points A, B, D et E ne sont pas coplanaires** (ou E n'appartient pas au plan (ABD))

b) $\overrightarrow{AF}=\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}$ et on cherche x et y tels que $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\3\\-4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{3}{2}x=3\\3x+3y=3\\-4x-4y=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\-6+3y=3\\8-4y=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=3\\y=3\end{cases}$ On a $\boldsymbol{\overrightarrow{AF}=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}}$

Les vecteurs sont coplanaires, donc les points A, B, D et F aussi : **le point F appartient au plan (ABD)**

Corrigé Exercice 17

1) $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}-\frac{1}{2}\overrightarrow{FD}}$ $\Rightarrow$ **Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.**

2) $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}$

On a donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AF}=-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}$ **les vecteurs $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.**

3) $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, donc les points A, B, C et M sont coplanaires, et **le point $\boldsymbol{M}$ appartient au plan $(\boldsymbol{ABC})$**

