Chapitre Fd : Fonctions et dérivées
Exercices en classe

Savoirs

Fd. 1 : Fonctions exponentielles (généralités et signes)

Fd. 2 : Fonctions logarithme népérien (généralités et signes)

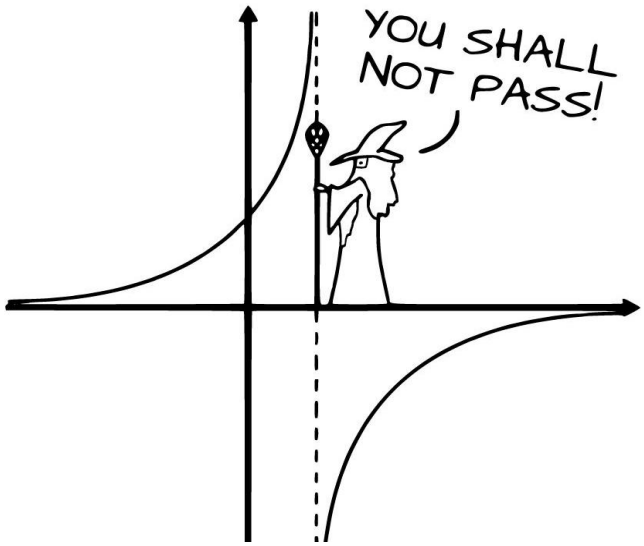
Fd. 3 : Calcul de dérivée (Rappels multiples, sommes)

Fd. 4 : Calcul de dérivée (Composées)

Fd. 5 : Calcul de dérivée (Produits et quotients)

Fd. 6 : Dérivées et sens de variation d'une fonction

Fd. 7 : Tangentes (graphique, équations)



Savoir Fd.1 : La fonction exponentielle

Exercice 1 : Calculer avec e^x

1) Simplifier si possible à la main les calculs suivants, puis donner une valeur approchée au dixième des résultats :

$F = e^3 - 5e^2$ $\quad G = 3e^{5+2}$ $\quad H = 2e^{-5} + 5$ $\quad I = \frac{5}{e^{-8\times 0,5}+1}$

2) Sans utiliser la calculatrice, juste avec les valeurs remarquables, simplifier au maximum les expressions suivantes :

$P = e^{5-2^2}$ $\quad S = 2e^{5-4} + 3e^{2^2-4}$ $\quad T = \frac{e^{3-2}\times e^{-2\times 4+8}}{3e}$

3) On donne : $f(x) = e^{-x} + e^x - 1$ et $g(x) = \frac{1+e^{2x}}{1-xe^x}$

a) Exprimer le plus simplement possible, puis donner une valeur approchée au centième de $f(0)$; $f(1)$ *et* $f(2)$

b) Exprimer le plus simplement possible, puis donner une valeur approchée à 0,1 près de $g(0)$; $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ *et* $g(1)$

Pour préparer le contrôle ...

On donne : $h(x) = 3xe^{x-2}$ et $\varphi(x) = (3 - e^x)(2xe^{-x} + 1)$

a) Exprimer le plus simplement possible, puis donner une valeur approchée de $h(3)$; $h(2)$ *et* $h(1)$

b) Exprimer le plus simplement possible, puis donner une valeur approchée de $\varphi(0)$; $\varphi(1)$ *et* $\varphi(-2)$

Exercice 2 : Représentations graphiques

1) $f(x) = e^{x^2-3}$ sur [−2 ; 2]

- Construire un tableau de valeur de pas 0,5 sur [−2 ; 2]
- Représenter la fonction sur cet intervalle, en prenant 2 carreaux pour 1 unité sur les deux axes

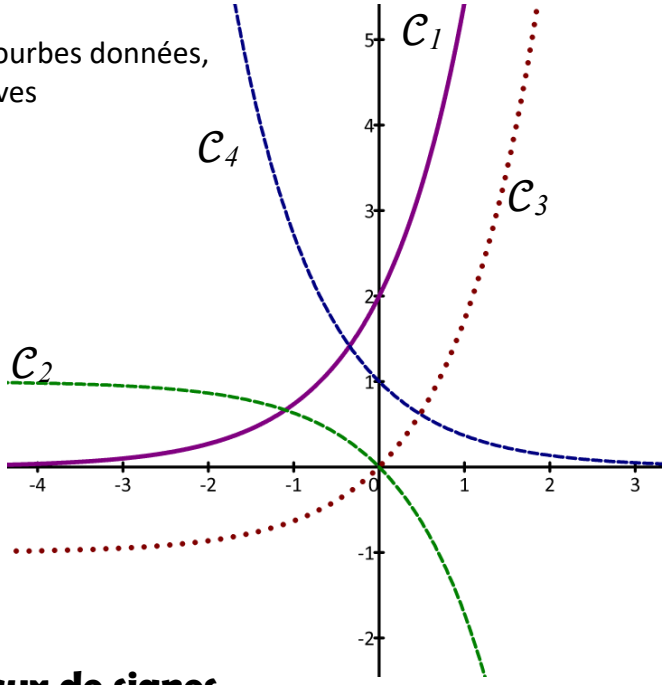
2) Identifier , parmi les courbes données, les courbes représentatives des fonctions :

$f : x \mapsto 2e^x$

$g : x \mapsto 1 - e^x$

$h : x \mapsto e^{-x}$

$i : x \mapsto e^x - 1$



Pour préparer le contrôle ...

$g(x) = \frac{2}{e^{x+1}}$ sur [−3 ; 1]

- Construire un tableau de valeur de pas 0,5 sur [−3 ; 1]
- Représenter la fonction sur cet intervalle, en prenant 2 carreaux pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 carreau pour 2 unités sur l'axe des ordonnées

Exercice 3 : Tableaux de signes

1) Donner le tableau de signe sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes

$f(x) = e^{x+2}$; $g(x) = 3e^{1-\frac{x}{2}}$; $h(x) = -4e^x$; $i(x) = (2x - 10)e^{3x}$

2) **a.** Donner le tableau de signe sur $[-5; 10]$ de $j(x) = -xe^{-x}$

b. Donner le tableau de signe sur $[1; 4]$ de $k(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$

c. Donner le tableau de signe sur $[1; +\infty[$ de $m(x) = \frac{e^x+1}{(2-x)e^{-x}}$

Pour préparer le contrôle ...

Donner le tableau de signe sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$\psi(x) = (5 - 2x)e^{-0,1x}$

$\phi(x) = -3(-2x^2 + 17x + 9)e^{2x}$

$\omega(x) = -2x^2e^{-3x^2+1}$

Savoir Fd.2 : La fonction logarithme népérien

Exercice 4 : Calculer avec ln

1) Sans utiliser la calculatrice, juste avec les valeurs remarquables, simplifier au maximum les expressions suivantes :

$K = 3\ln(1) - 7$ $\quad$ $L = 2 + \ln(e)$ $\quad$ $M = 2\ln(e) - \frac{\ln(1)}{2}$

2) Simplifier si possible à la main les calculs suivants, puis donner une valeur approchée au dixième des résultats :

$A = 3\ln(5) - \ln(5)$ $\quad$ $B = \ln(5 \times 2 - 4)$ $\quad$ $C = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \ln(2)$

Pour préparer le contrôle ...

1) Simplifier au maximum

$N = \frac{5\ln 1 - 3}{1 + \ln e}$ $\quad$ $P = \frac{3\ln(5 - 2^2)}{\ln(e + 1)}$

2) Simplifier si possible, puis donner une valeur approchée à 0,1 près

$D = \frac{\ln 5}{5} + 3$ $\quad$ $E = \ln(10 - 3^2) - 1$

3) On donne les fonctions : $f(x) = x^2 \ln(x-2)$ $\quad g(x) = \dfrac{x^2-x}{2\ln(x)}$

a) Exprimer, puis calculer (si possible) $f(5), f(3)$ et $f(0)$.

b) Exprimer, puis calculer (si possible) $g(2)$, $g(e)$ et $g(1)$.

3) On donne :
$$h(x) = 2x\ln(x) - 1$$
Exprimer, puis calculer $h(3)$, $h(e)$ et $h(1)$

4) On donne la fonction $g(x) = 30\ln(x) - 50$
et ci-contre, son tableau de variation sur l'intervalle [1 ; 7]
Compléter les extrema avec les valeurs exactes.

x	1		7
$g(x)$		↗	

Exercice 5 : Représentations graphiques

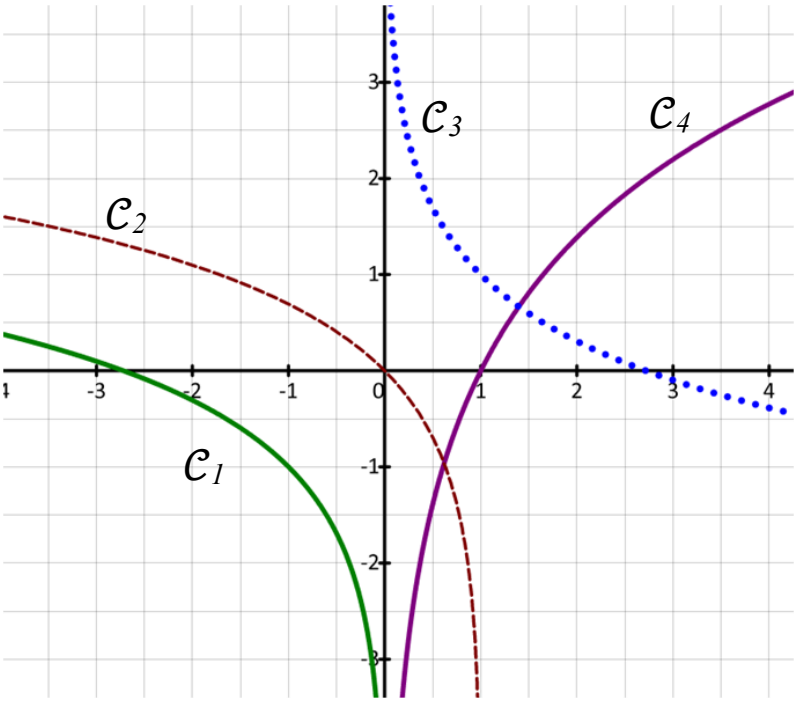
1) $f(x) = x - \ln(x+2)$ sur $]-2\,;\,5]$

- Construire un tableau de valeur de pas 1 sur $]-2\,;\,5]$ et ajouter $f(-1{,}9)$; $f(-1{,}8)$ et $f(-1{,}5)$

- Représenter la fonction sur cet intervalle, en prenant 2 carreaux pour 1 unité sur les deux axes

2) Identifier, parmi les courbes données ci-contre, les courbes représentatives des fonctions :

$f : x \mapsto 2\ln(x)$
$g : x \mapsto 1 - \ln(x)$
$h : x \mapsto \ln(-x) - 1$
$i : x \mapsto \ln(1-x)$



Exercice 6 : Tableaux de signes

Donner le tableau de signe des fonctions suivantes, sur leur domaine de définition :

$f(x) = x\ln(x)$ Pour $x > 0$ $\quad g(x) = (9-x^2)\ln(x)$ Pour $x \in [1;5]$ $\quad h(x) = \dfrac{4-2x}{\ln(x)}$ pour $x \in]0;3]$

Pour préparer le contrôle ...

Donner le tableau de signe sur le domaine de définition :

$i(x) = -3\ln x$ Pour $x > 0$ $\quad k(x) = \dfrac{\ln x}{2x^2 - 7x + 3}$ Pour $x \in]0;4]$

Exercice 7 : Domaine de définition

1) Logarithmes : Déterminer le domaine de définition :

$f(x) = \ln(3 - x)$ $\quad$ $g(x) = \ln(x^2 + x - 2)$

$h(x) = \ln(x - 1)$ $\quad$ $j(x) = \ln(x^2)$

2) Autres : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :

$m(x) = \sqrt{6 - x}$ $\quad$ $P(x) = \dfrac{1}{6 - x}$

Pour préparer le contrôle …

Déterminer l'ensemble de définition :

$i(x) = \ln(x^2 + 3)$

$r(x) = \dfrac{\ln(x + 3)}{x}$

$k(x) = \dfrac{2x}{-x^2 - x + 6}$

Savoir Fd. 3 : Calcul de dérivée (multiples et sommes)

Exercice 8 : Dérivée des sommes et multiples de fonctions de référence

1) Fonctions polynômes

$f(x) = 2x^2 + 5x - 1$ $\quad$ $g(x) = 5x - x^2$

$h(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{2}$ $\quad$ $i(x) = -3x^3 + x^2 - 7x$

$j(x) = 2x^3 - \dfrac{x}{2} + 5$ $\quad$ $k(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{5x^2}{2} + 3$

2) Racines et inverses

$m(x) = 4 + \dfrac{2}{3x}$ $\quad$ $n(x) = 1 - \dfrac{\sqrt{x}}{6}$

$p(x) = 2x^2 - \dfrac{5}{x}$ $\quad$ $q(x) = 8\sqrt{x} - 3x + 1$

Pour préparer le contrôle …

1) Fonctions polynômes

$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

$g(x) = 4x^3 - x + 5$

$h(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + 7x^2$

2) Racines et inverses

$j(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x} - \dfrac{2}{3x}$

$k(x) = \dfrac{3}{2x} - \dfrac{3x}{2}$

Exercice 9 : Autres dérivées

1) Dériver les fonctions suivantes :

$\phi(x) = 4e^x - 2$ $\quad$ $h(x) = \ln(x) + \dfrac{1}{x}$

$j(t) = -2\cos(t)$ $\quad$ $g(x) = x^3 - 5e^x$

$m(x) = e^2 + x - \ln(x)$ $\quad$ $p(x) = \dfrac{3x + \sin(x)}{4}$

$i(x) = e^x + x^5$ $\quad$ $k(a) = \ln(3) - e^a$

Pour préparer le contrôle …

1) Dériver les fonctions suivantes :

$k(x) = 5e^x$ $\quad$ $C(x) = \ln x - 4$

$F(t) = e^t - 4 + 2t$ $\quad$ $n(x) = \dfrac{\ln x}{3}$

$d(x) = 2e^x + \ln(x)$ $\quad$ $g(x) = x^2 + 1 - 3\ln x$

$l(n) = \dfrac{3e^n - 5n^2}{2}$ $\quad$ $\omega(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\cos x}{2}$

2) On considère la fonction f définie sur [1 ; 10] par : $f(x) = 3x^2 - 21x + 3 - 12\ln(x)$

a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f.

b. Démontrer que l'on a :

$$f\,'(x) = \frac{3(2x^2 - 7x - 4)}{x}$$

2) On considère la fonction f définie sur [1 ; 10] par :

$$g(x) = x + 2\ln(x) - \frac{1}{2x}$$

a. Déterminer l'expression de la dérivée g' de g.

b. Démontrer que l'on a :

$$g\,'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{2x^2}$$

Savoir Fd. 4 : Calcul de dérivée (Composées)

Exercice 11 : Composées du type e^u, $\ln(u)$, $\sin(u)$ et $\cos(u)$

Dériver les fonctions suivantes

$f(x) = e^{-5x}$ $\quad$ $g(x) = \cos(4x + 3)$

$h(x) = \ln(-2x)$ $\quad$ $i(x) = e - 2e^{2-3x}$

$\phi(t) = \frac{1}{2}e^{t^2}$ $\quad$ $A(x) = \ln\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)$

$p(x) = 4e^{3x} - e^{-x}$ $\quad$ $T(x) = 3 - \sin(2x^2)$

Pour préparer le contrôle ...

Dériver les fonctions suivantes

$f(x) = \sin(x^2 + 2x)$ $\quad$ $\psi(x) = 1 - e^{1-0,5x}$

$\alpha(x) = e^{x^2+x-3}$ $\quad$ $g(t) = 2t - 2\ln(4t)$

$\beta(x) = 2e^{-x^2}$ $\quad$ $h(x) = -4\ln(4x + 1) - 3x$

$j(x) = \frac{\cos(2x + 3)}{2}$ $\quad$ $b(x) = 1000\,e^{-0,03x}$

Exercice 12 : Composées des autres cas

1) Puissances : dériver

$f(x) = (3x - 4)^5$ $\quad$ $g(x) = (1 - 2x)^3$

$k(x) = \frac{(2x + 5)^3}{6}$ $\quad$ $a(x) = (x^2 + 1)^4$

2) Inverses et racines : dériver

$f(x) = \sqrt{3x + 1}$ $\quad$ $i(x) = 2x - \sqrt{1 - x}$

$m(x) = \frac{1}{5x-1}$ $\quad$ $p(x) = \frac{-3}{2x+1}$

Pour préparer le contrôle ...

1) Puissances : dériver

$h(x) = 4(6x + 5)^2$ $\quad$ $i(x) = -\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)^4$

$l(x) = \frac{(-2x - 4)^2}{4}$ $\quad$ $c(x) = -2(x^3 + 1)^4$

2) Inverses et racines : dériver

$j(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$ $\quad$ $h(x) = 2e^x + \frac{\sqrt{-3x}}{6}$

$b(x) = \frac{1}{2 - x^2}$ $\quad$ $c(x) = 4\ln(x) + \frac{1}{4x}$

Savoir Fd. 5 : Calcul de dérivée (produits et quotients)

Exercice 13 : Dérivées de produits

Dériver les fonctions proposées.

1. Avec exponentielle

a) $f(x) = xe^x$ b) $g(x) = (3x - x^3)e^x$

c) On donne $h(x) = (5x - 1)e^x$. Montrer que $h'(x) = (5x + 4)e^x$

d) $i(x) = 3xe^{-x}$ e) $j(x) = (10x - 50)e^{2-0,3x}$

f) $k(x) = 2x^2e^{-\frac{x}{2}}$

2. Avec ln, sin & cos

a) $f(x) = 3x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ b) $g(x) = x(2\ln(x) - 1)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

c) $h(x) = x^2\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ d) $l(x) = x\sin(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$

e) $j(x) = \sin(3x)\cos(3x)$ f) $k(x) = 1 + (1 - \ln x)\ln(x - 1)$

3. Avec polynômes et racines

a) $k(x) = (2x^2 - 5)\left(\frac{x^3}{3} - 2x\right)$ b) $h(x) = (2 - x)\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$

Pour préparer le contrôle …

1. a) $m(x) = 3x + 2xe^x$

b) On donne $f(x) = 3 - (2x - 4)e^x$
Montrer que : $f'(x) = 2(1 - x)e^x$

c) $a(x) = 1 - e^{-x}$

d) $s(x) = (1 - x)e^{1-x}$

2. a) $m(x) = 5x - x\ln x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

b) $p(x) = x^2\ln(2x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

c) $Y(x) = x^2\sin(x - 2)$

3. a) $n(x) = -3x^2(x + x^3)$

b) $m(x) = 3x^2\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$

Exercice 14 : Dérivées de quotients

Dériver les fonctions proposées.

1. Avec exponentielle

a) $j(x) = \frac{e^x}{2x+1}$ pour $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ b) $h(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$

c) $n(x) = \frac{3}{e^{2x}+2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ e) $w(x) = \frac{e^x-1}{e^{3x}}$ sur $\mathbb{R}$

2. Avec ln, sin & cos

a) $j(x) = \frac{\ln(x)+1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ b) $k(x) = \frac{x}{4\ln(x)}$ pour $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$

c) $m(x) = \frac{3\ln(x)}{1-x}$ pour $x > 1$ d) $f(x) = \frac{\sin(2x-4)}{2}$ pour $x > 2$

3. Avec polynômes et autres

a) $f(x) = \frac{3x^2}{1-x}$ pour $x \neq 1$ b) $g(x) = \frac{2x+1}{3-4x}$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\}$

c) $i(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$

Pour préparer le contrôle …

1. a) $p(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$

b) $u(x) = \frac{e^{3x}}{2x+1}$ pour $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

2. *a)* $k(x) = \frac{x+\ln x}{x\ln x}$ pour $x > 1$

b) $g(x) = \frac{\cos(2x)}{x+1}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

3. $m(x) = \frac{x^4+1}{x^3-1}$ pour $x \neq 1$

Savoir Fd. 6 : Dérivées et variations

Exercice 15 : Variations d'une fonction

1) Polynôme

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x - 7$$

a) Calculer $f'(x)$

b) Déterminer le tableau de signe de f'

c) En déduire le tableau de variation de f

d) Compléter ce tableau en rajoutant les valeurs des extrema

2) Expression rationnelle

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 6 + \frac{4}{x}$

a) Montrer que, pour $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$

b) Étudier le signe de f' et en déduire le tableau de variation complet de f

3) Exponentielles

On définit la fonction g définie sur [−2 ; 1] par :

$$g(x) = e^{-2x^2}$$

a) Calculer $g'(x)$

b) En déduire le tableau de variation complet de g

4) Logarithme népérien

On considère la fonction f définie sur [1 ; 10] par :

$$f(x) = 3x^2 - 21x + 3 - 12\ln(x)$$

a) Démontrer que l'on a : $f'(x) = \frac{3(x-4)(2x+1)}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de $f(x)$ sur [1 ; 10].

Pour préparer le contrôle ...

1) Polynôme

On définit la fonction g sur $[0; 5]$ par

$$g(x) = \frac{2x^3}{3} - 6x^2 + 18x - 1$$

a) Dériver g

b) En déduire le tableau de variation de g

2) Expressions rationnelles

On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = 5 - \frac{1}{4x} + 2x$$

a) Montrer que $h'(x) = \frac{1+8x^2}{4x^2}$

b) Justifier que la fonction h est croissante sur $]0; +\infty[$

3) Exponentielles

On définit la fonction A sur $[0; 20]$ par :

$$A(t) = 10e^{-0{,}05t^2+0{,}8t}$$

a) Calculer $A'(t)$.

b) En déduire le tableau de variation complet de A sur $[0; 20]$

4) Logarithme népérien

Soit f la fonction définie sur $[0; 5]$ par :

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x^2 + 1)$

a) Montrer que $f'(x) = \frac{x(x^2-1)}{x^2+1}$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 5]$

Exercice 16 : Polynôme de degré 4...

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - 5x^2 + 12x + 1$

1) a. Calculer $f'(x)$

b. Montrer que $f'(x) = 2(x-3)(x^2 + x - 2)$

2) a. Établir le tableau de signe de la dérivée f'

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f

Exercice 17 : Inégalités et encadrements

1) La fonction b, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$b(x) = x^5 - 15x^3$$

a) Déterminer le signe de la dérivée $b'(x)$

b) Montrer que, pour $x \in [-3\ ;\ 0]$, on a :

$$0 \leq b(x) \leq 162$$

2) La fonction f est définie sur [0 ; 20] par :

$$f(x) = (5x - 5)e^{-0,2x}$$

a. Démontrer que $f'(x) = (-x + 6)e^{-0,2x}$ pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$.

b. Dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 20]. On fera apparaître les valeurs exactes.

c. Justifier que, pour $x \in [0; 20]$, on a $f(x) \leq 8$

3) On considère la fonction h définie sur]0 ; 1[par :

$$h(x) = \ln(x - x^2)$$

a) Déterminer l'expression de la dérivée h' de h.

b) Dresser le tableau de signe de $h'(x)$ sur]0 ; 1[

c) Justifier si h admet un minimum ou un maximum sur]0 ; 1[

Pour préparer le contrôle ...

1) La fonction t, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$t(x) = x^4 - 8x^2 + 6$$

a. Montrer que t a pour dérivée $t'(x) = 4x(x^2 - 4)$

b . Montrer qu'il existe un réel m tel que $t(x) \geq m$ pour tout réel x

2) On considère la fonction ϕ définie sur [-1 ;1] par :

$$\phi(t) = e^{1-t^2}$$

a. Déterminer le tableau de variation de $\phi(t)$

b. Justifier que, pour $t \in [-1; 1]$, on a :

$$1 \leq \phi(t) \leq 3$$

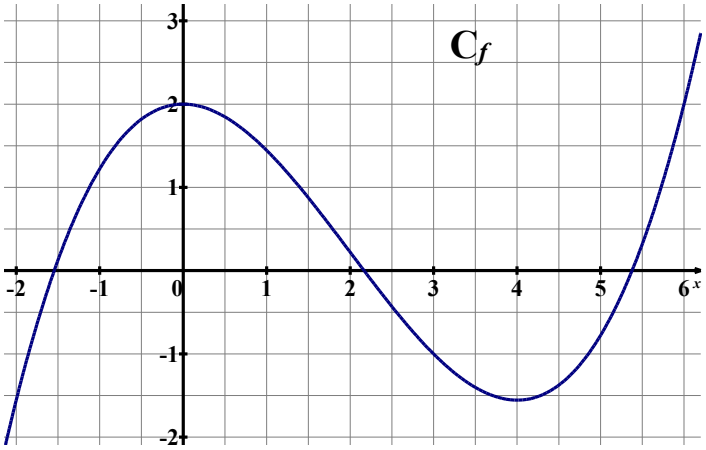
3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x + 6 + \frac{9}{x}$$

Montrer que, pour $x \in [-6\ ;\ -1]$, on a $g(x) \in [-4\ ;\ 0]$

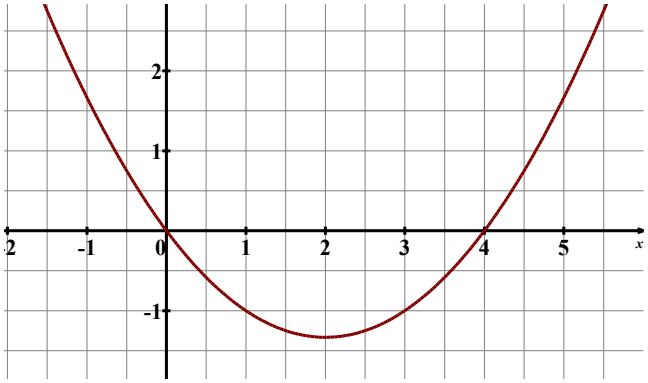
Exercice 18 : Lien graphique entre fonction et dérivée

1) La courbe ci-dessous ⇓ représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 6]$

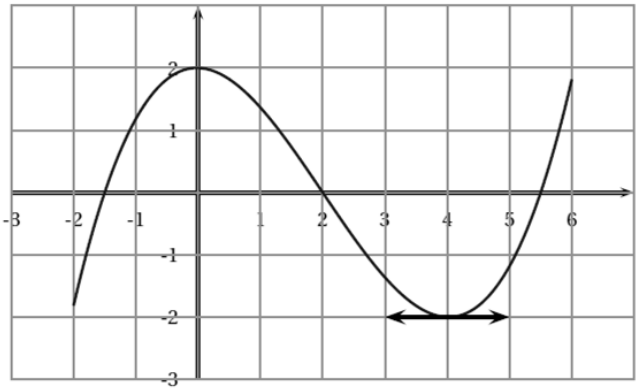


La fonction f est dérivable sur $[-2\ ;\ 6]$ et on note f' sa dérivée.

La courbe ci-dessous ⇓ peut-elle représenter cette dérivée f'



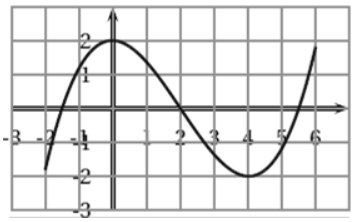
2) La courbe ci-contre représente une fonction g définie sur l'intervalle [−2 ; 6]



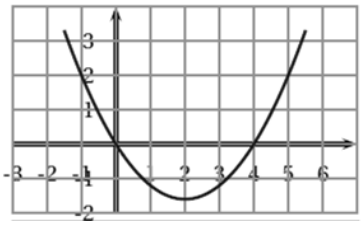
Question 1

On note g' la dérivée de la fonction g.
Parmi les 4 courbes données ci-dessous, indiquer laquelle peut représenter g'

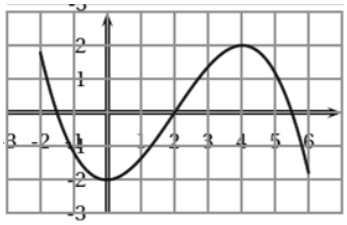
Réponse A



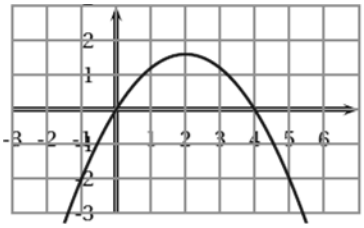
Réponse B



Réponse C



Réponse D



Question 2 : Le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle [−2 ; 6] est :

Réponse A : 0 **Réponse B :** 1 **Réponse C :** 2 **Réponse D :** 3

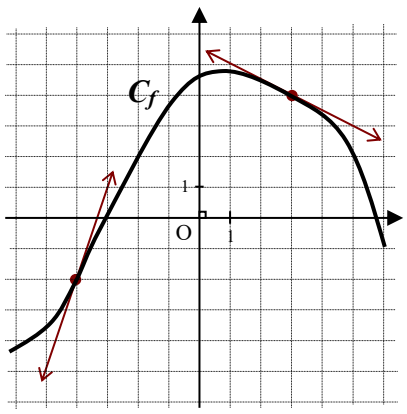
Question 3 : Le nombre de solutions de l'équation $g'(x) = 0$ sur l'intervalle [−2 ; 6] est :

Réponse A : 0 **Réponse B :** 1 **Réponse C :** 2 **Réponse D :** 3

Savoir Fd. 7 : Tangentes

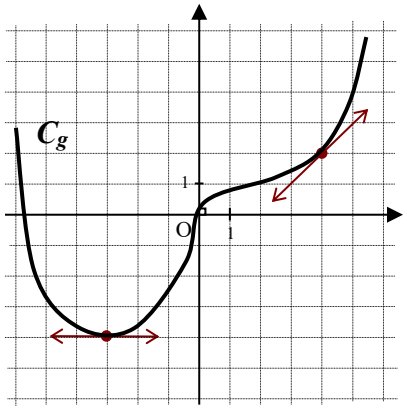
Exercice 19 (1) : Détermination graphique du nombre dérivé

Pour chaque graphique, déterminer graphiquement les images et les nombres dérivés aux points demandés.



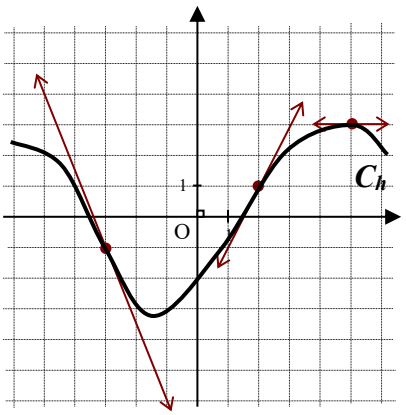
$f(-4) =$ et $f'(-4) =$

$f(3) =$ et $f'(3) =$



$g(-3) =$ et $g'(-3) =$

$g(4) =$ et $g'(4) =$



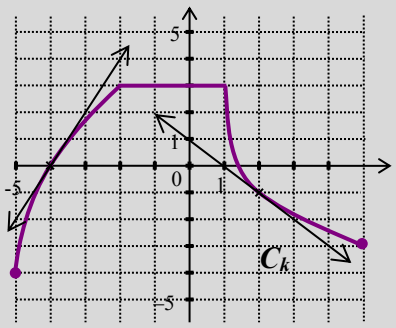
$h(-3) =$ et $h'(-3) =$

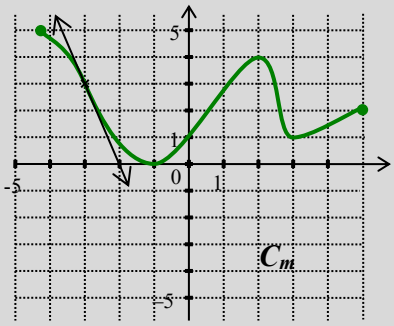
$h(2) =$ et $h'(2) =$

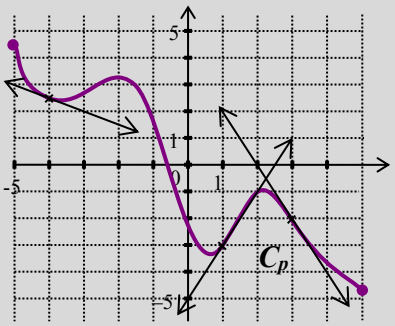
$h(5) =$ et $h'(5) =$

Pour préparer le contrôle …

On donne les représentations graphique des fonctions k , m et p :







a. Donner graphiquement les valeurs de k' pour les valeurs de x égales à –4 ; –1 et 2.

b. Déterminer graphiquement : $m'(-3)$; $m(-3)$; $m'(-1)$; $m(3)$ et $m'(2)$.

c. Déterminer graphiquement : • La valeur de la dérivée de p en –4 • L'image de 1 par la fonction p • La valeur de $p'(1)$ • La pente de la courbe de p en $x = 3$

Exercice 20 : Équations de tangentes

1) On donne pour une fonction f les images :
$f(-2) = 2$; $f(0) = -5$ et $f(3) = 0$
et les nombres dérivés : $f'(-2) = 0$; $f'(0) = 3$ et $f'(3) = -1$
Déterminer l'équation des tangentes à la courbe de f : T_{-2} , T_0 et T_3

2) Soit g la fonction définie sur]2 ; +∞[par : $g(x) = x^2 + \ln(x-2)$.

a. Déterminer $g'(x)$.

b. Écrire une équation de la tangente T à C_g au point d'abscisse 3.

Pour préparer le contrôle …

1) On donne pour une fonction g les images :
$g(-1) = \frac{1}{3}$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = -4$ et les nombres dérivés : $g'(-1) = 2$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
Déterminer l'équation des tangentes à la courbe de g : T_{-1} et $T_{1/2}$

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$
Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
On admet que la dérivée f' est : $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$
Écrire une équation de la droite $\mathcal{T}$

Exercice 21 : Études de fonctions

1) Soit g la fonction définie sur]2 ; +∞[par : $g(x) = x^2\ln(x-2)$.

a. Déterminer $g'(x)$.

b. Écrire une équation de la tangente T à C_g au point d'abscisse 3.

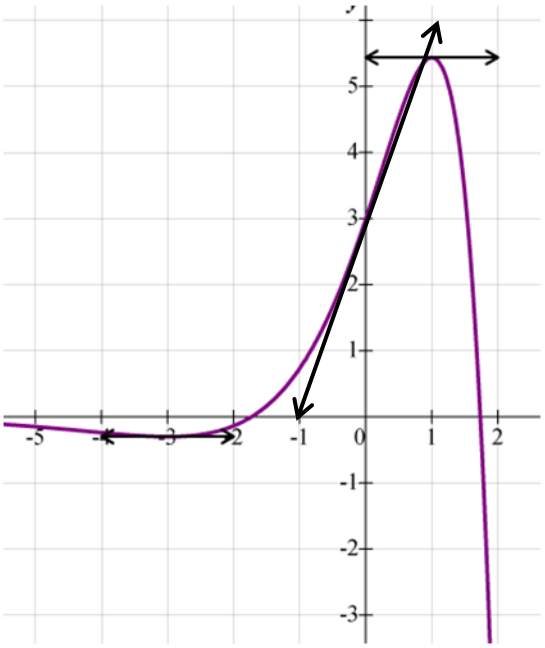
2) On définit sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ la fonction : $j(x) = \frac{3x^2-9}{x+2}$

a. Calculer $j'(x)$ et étudier son signe

b. Montrer que, pour $x > -2$, on a $j(x) \geq -6$

c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de j au point d'abscisse $x = 1$

3) La courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction f définie et dérivable sur $]-\infty; 2]$ et certaines de ses tangentes.



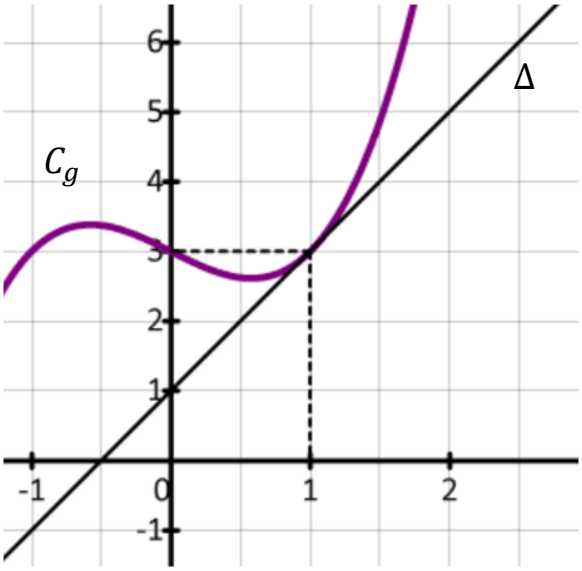
a. Par <u>lecture graphique</u>, déterminer :

- les valeurs de $f(0)$; $f'(1)$; $f'(-3)$ et $f'(0)$
- une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0
- les solutions de l'équation $f(x) = 0$

b. La courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = (3 - x^2)e^x$.
Déterminer <u>par le calcul</u> les résultats demandés à la question précédente.

Exercice 22 : Paramétrage

1) On donne ci-contre la représentation graphique C_g d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax^3 - x + b$, où a et b sont deux nombres réels.
La droite Δ est la tangente à C_g au point d'abscisse $x = 1$



a. Déterminer graphiquement $g'(1)$
b. Dériver $g(x)$ et en déduire a
c. Déterminer graphiquement $g(1)$, et en déduire b
d. Donner l'expression littérale de g

2) On définit la fonction h sur $[-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = a\ln(2x + 3) + b$$

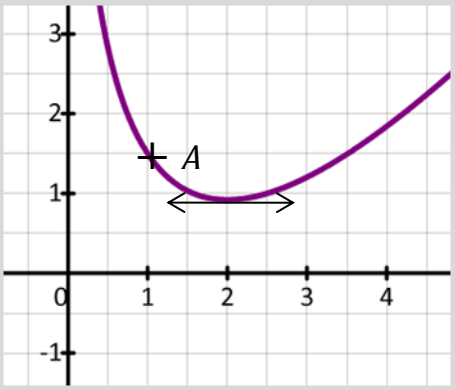
où a, b sont des réels

On donne : $h(-1) = 4$ et $h'(0) = 1$.

Déterminer les valeurs des coefficients a et b. Quelle est alors l'expression de h ?

Pour préparer le contrôle ...

1) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = ax + b\ln x$ où a, b sont des réels.
On donne ci-contre la représentation graphique C_f de la fonction f.
Le point $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ appartient à C_f et la tangente à C_f au point B d'abscisse 2 est horizontale.

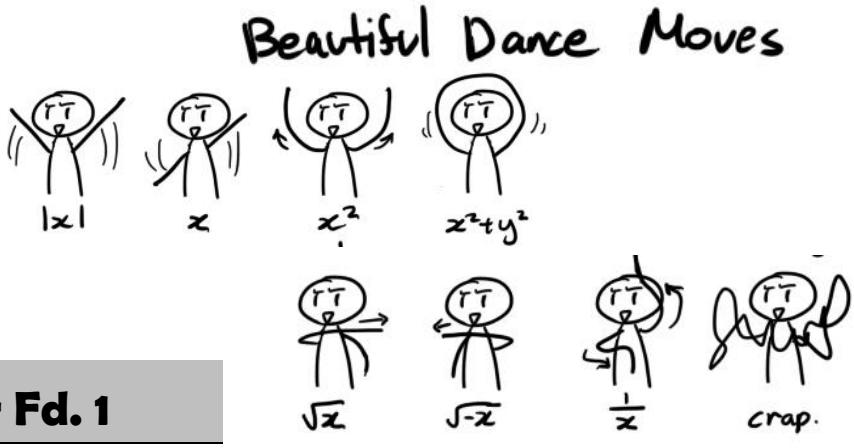


a. Donner $f(1)$ et $f'(2)$

b. Calculer les réels a et b

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels.
On sait de plus que $f(0) = -1$; $f(1) = -2$ et $f(-2) = 13$.
Déterminer les coefficients a, b et c

Corrections



Corrections Savoir Fd. 1

Corrigé Exercice 1

1) $F \simeq -\mathbf{16,9}$ $\quad G = \mathbf{3}e^{\mathbf{7}} \simeq \mathbf{3\,289,9}$ $\quad H \simeq \mathbf{5,0}$ $\quad I = \frac{5}{e^{-4}+1} \simeq \mathbf{4,9}$

2) $P = e^1 = \boldsymbol{e}$ $\quad S = 2e^1 + 3e^0 = \mathbf{2}\boldsymbol{e} + \mathbf{3}$ $\quad T = \frac{e^1 \times e^0}{3e} = \frac{e \times 1}{3e} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

3) $f(0) = e^0 + e^0 - 1 = 1 + 1 - 1 = \mathbf{1}$; $f(1) = e^{-1} + e^1 - 1 = \mathbf{\frac{1}{e}} + \boldsymbol{e} - \mathbf{1} \simeq 2{,}09$

et $f(2) = \boldsymbol{e}^{-\mathbf{2}} + \boldsymbol{e}^{\mathbf{2}} - \mathbf{1} \simeq 6{,}52$

$g(0) = \frac{1+e^0}{1-0e^0} = \frac{1+1}{1} = \mathbf{2}$; $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1+e^{-1}}{1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}} \times \frac{2e^{\frac{1}{2}}}{2e^{\frac{1}{2}}} = \frac{2(1+e)}{2e+\sqrt{e}} \simeq 1{,}0$

et $g(1) = \mathbf{\frac{1+e^2}{1-e}} \simeq -4{,}9$

Pour préparer le contrôle …

a) $h(3) = 3 \times 3e^{3-2} = \mathbf{9}\boldsymbol{e} \simeq 24{,}5$ $\quad h(2) = 6e^0 = \mathbf{6}$ $\quad$ et $\quad h(1) = 3\boldsymbol{e}^{-\mathbf{1}} = \frac{3}{e} \simeq 1{,}1$

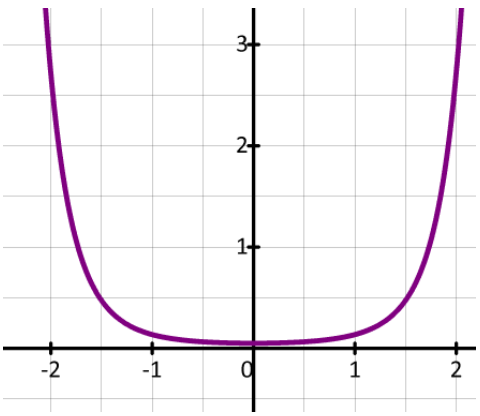
b) $\varphi(0) = (3 - e^0)(0 + 1) = 3 - 1 = \mathbf{2}$ $\quad \varphi(1) = (\mathbf{3} - \boldsymbol{e})(\mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-\mathbf{1}} + \mathbf{1}) = (3 - e)\left(\frac{2}{e} + 1\right) \simeq 0{,}5$

et $\quad \varphi(-2) = (\mathbf{3} - \boldsymbol{e}^{-\mathbf{2}})(-\mathbf{4}\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}} + \mathbf{1}) \simeq -81{,}8$

Corrigé Exercice 2

1)

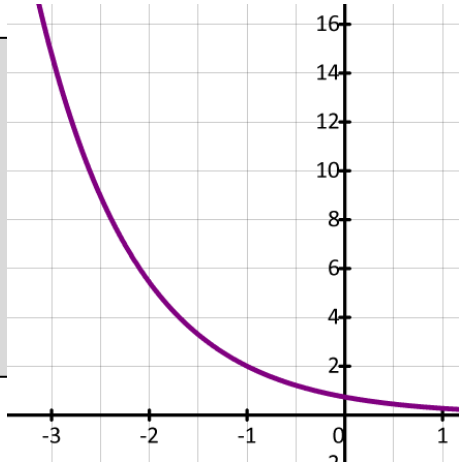
x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	2,7	0,5	0,14	0,06	0,05	0,06	0,14	0,5	2,7



2) f : $\mathcal{C}_1$ car passe par le point $(0; 2)$
g : $\mathcal{C}_2$ car décroissante et passe par $(0; 0)$
h : $\mathcal{C}_4$ car passe par le point $(0; 1)$
i: $\mathcal{C}_3$ car croissante et passe par $(0; 0)$

Pour préparer le contrôle …

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1
$g(x)$	14,8	9,0	5,4	3,3	2	1,2	0,7	0,4	0,3



Corrigé Exercice 3

1) Une exponentielle est toujours positive

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	+	

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	−	

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$2x-10$	−	0	+
e^{3x}	+	|	+
$i(x)$	−	**0**	+

2) Pour k : x^2-3x+2, on a $\Delta = 1$; $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$

Pour m : $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 1 > 0$ (somme de deux nombres strictement positifs)

x	-5	0	10
$-x$	+	0	−
e^{-x}	+	|	+
$j(x)$	+	**0**	−

x	1	2	4
x^2-3x+2	0	− 0	+
e^x	+	|	+
$k(x)$	**0**	− **0**	+

x	1	2	$+\infty$
e^x+1	+	|	+
$2-x$	+	0	−
e^{-x}	+	|	+
$m(x)$	+	||	−

Pour préparer le contrôle…

x	$-\infty$	2,5	$+\infty$
$5-2x$	+	0	−
$e^{-0,1x}$	+	|	+
$\psi(x)$	+	**0**	−

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	9	$+\infty$
-3	−	| −	|	−
$-2x^2+17x+9$	−	0	+ 0	−
e^{2x}	+	|	+ |	+
$\phi(x)$	+	0	− 0	+

x	$-\infty$	0	∞
$-2x^2$	−	0	−
e^{-3x^2+1}	+	|	+
$\omega(x)$	−	**0**	−

Corrections Savoir Fd. 2

Corrigé Exercice 4

1) $K = 3 \times 0 - 7 = \mathbf{-7}$ $\quad L = 2 + 1 = \mathbf{3}$ $\quad M = 2 \times 1 - \frac{0}{2} = \mathbf{2}$

2) $A = 2\ln 5 \Rightarrow A \simeq 3{,}2$ $\quad B = \ln(6) \Rightarrow B \simeq 1{,}8$ $\quad C = \ln\frac{1}{2} \times \ln 2 \Rightarrow C \simeq -0{,}5$

3) a) $f(5) = 5^2\ln(3) = \mathbf{25\ln 3} \simeq \mathbf{27{,}5}$; $f(3) = 9\ln 1 = \mathbf{0}$

et $\boldsymbol{f(0)}$ **n'existe pas** car $\ln(-2)$ est impossible

b) $g(2) = \frac{2^2-2}{2\ln 2} = \frac{2}{2\ln 2} = \mathbf{\frac{1}{\ln 2}} \simeq \mathbf{1{,}4}$; $g(e) = \frac{e^2-e}{2\ln e} = \mathbf{\frac{e^2-e}{2}} \simeq \mathbf{2{,}3}$

et $\boldsymbol{g(1)}$ **n'existe pas** car on ne peut pas diviser par zéro.

4) $g(1) = 30\ln 1 - 50 = -50$ et $g(7) = 30\ln 7 - 50$

x	1	7
$g(x)$	-50 ↗	$30\ln 7 - 50$

Pour préparer le contrôle…

1) $N = \frac{5\times0-3}{1+1} = \mathbf{-\frac{3}{2}}$ $\quad P = \frac{3\ln(1)}{\ln(e+1)} = \frac{0}{\ln(e+1)} = \mathbf{0}$ $\quad$ **2)** $D = \frac{\ln 5}{5} + 3 \Rightarrow D \simeq 3{,}3$ $\quad E = \ln(1) - 1 = \mathbf{-1}$

3) $h(3) = 2 \times 3 \times \ln 3 - 1 = \mathbf{6\ln 3 - 1} \simeq \mathbf{5{,}6}$; $h(e) = 2e\ln e - 1 = \mathbf{2e - 1} \simeq \mathbf{4{,}4}$

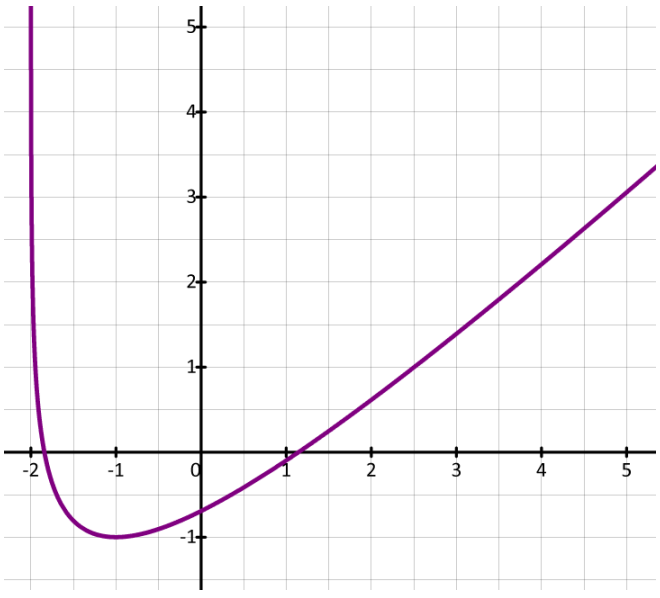
et $h(1) = 2 \times 1 \times \ln 1 - 1 = 0 - 1 = \mathbf{-1}$

Corrigé Exercice 5

1) Valeurs approchées à 0,1

x	−2	−1,9	−1,8	−1,5	−1	0
$f(x)$	||	0,4	−0,2	−0,8	−1	−0,7

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	−0,1	0,6	1,4	2,2	3,1



2) f : définie sur $]0;+\infty[$, assez identique à $\ln x$
$\Rightarrow$ courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_4}$

g : définie sur $]0;+\infty[$, symétrique par rapport à (Ox) et montée de 1 $\Rightarrow$ courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_3}$

h : définie sur $]-\infty;0[$ symétrique par rapport à (Oy) et baissée de 1 $\Rightarrow$ courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_1}$

i : $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, définie sur $]-\infty;1[$ celle qui reste… $\Rightarrow$ courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_2}$

Corrigé Exercice 6

x	0		1	$+\infty$
x	0	$+$	$\vert$	$+$
$\ln x$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\vert\vert$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

x	1		3	5
$9-x^2$	$\vert$	$+$	0	$-$
$\ln x$	0	$+$	$\vert$	$+$
$\boldsymbol{g(x)}$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$

x	0		1		2	3
$4-2x$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
$\ln x$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$\boldsymbol{h(x)}$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$

Pour préparer le contrôle…

x	0		1	$+\infty$
-3		$-$	$\vert$	$-$
$\ln x$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$
$\boldsymbol{i(x)}$	$\vert\vert$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$

$\Delta = 25$; $x_1 = 3$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1		3		4
$\ln x$	$\Vert$	$-$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2x^2-7x+3$		$+$	0	$-$	$\mathbf{\vert}$	$-$	0	$+$	
$\boldsymbol{k(x)}$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\Vert$	$+$	

Corrigé Exercice 7

1) $f(x) = \ln(3-x)$ $\Rightarrow$ On doit avoir $3-x>0 \Leftrightarrow x<3$ $\Rightarrow$ $D_f =]-\infty;\mathbf{3}[$

$g(x) = \ln(x^2+x-2)$ $\Rightarrow$ On doit avoir : $x^2+x-2>0$ avec $\Delta = 9$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{D_g} =]-\infty;\mathbf{-2}[\cup]\mathbf{1};+\infty[$

$h(x) = \ln(x-1)$ $\Rightarrow$ On doit avoir $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ $\Rightarrow$ $D_h =]\mathbf{1};+\infty[$

$j(x) = \ln(x^2)$ $\Rightarrow$ On doit avoir $x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$ $\Rightarrow$ $D_j = \mathbb{R}^*$

2) $m(x) = \sqrt{6-x}$ $\Rightarrow$ On doit avoir $6-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 6$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{D_m} =]-\infty;\mathbf{6}]$ (6 est possible)

$P(x) = \frac{1}{6-x}$ $\Rightarrow$ On doit avoir $6-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 6$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{D_P} = \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{6}\}$

Pour préparer le contrôle…

$i(x) = \ln(x^2+3)$ $\Rightarrow$ On doit avoir $x^2+3>0$ ce qui est toujours vrai (somme de +) $\Rightarrow$ $D_i = \mathbb{R}$

$r(x) = \frac{\ln(x+3)}{x}$ $\Rightarrow$ On doit avoir $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$ Et aussi $x\neq 0$ $\Rightarrow$ $D_r =]\mathbf{-3};\mathbf{0}[\cup]\mathbf{0};+\infty[$

$k(x) = \frac{2x}{-x^2-x+6}$ $\Rightarrow$ On doit avoir $-x^2-x+6\neq 0$ avec $\Delta = 25$; $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{D_k} = \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{-3};\mathbf{2}\}$

Corrections Savoir Fd. 3

Corrigé Exercice 8

1) $f'(x) = \mathbf{4x + 5}$ $\quad g'(x) = \mathbf{5 - 2x}$

$h'(x) = \mathbf{8x}$ $\quad i'(x) = \mathbf{-9x^2 + 2x - 7}$

$j'(x) = \mathbf{6x^2 - \frac{1}{2}}$ $\quad k'(x) = \mathbf{\frac{x^2}{2} - 5x}$

2) $m'(x) = \mathbf{-\frac{2}{3x^2}}$ $\quad n'(x) = \mathbf{\frac{-1}{12\sqrt{x}}}$

$p'(x) = \mathbf{4x + \frac{5}{x^2}}$ $\quad q'(x) = \mathbf{\frac{4}{\sqrt{x}} - 3}$

Pour préparer le contrôle…

1) $f'(x) = 4x - 5$

$g'(x) = 12x^2 - 1$

$h'(x) = \mathbf{x^3 - 2x^2 + 14x}$

2) $j'(x) = \mathbf{\frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{2}{3x^2}}$

$k'(x) = \mathbf{-\frac{3}{2x^2} - \frac{3}{2}}$

Corrigé Exercice 9

1) $\phi'(x) = \mathbf{4e^x}$ $\quad h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \mathbf{\frac{x-1}{x^2}}$

$j'(t) = \mathbf{2\sin(t)}$ $\quad g'(x) = \mathbf{3x^2 - 5e^x}$

$m'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \mathbf{\frac{x-1}{x}}$ $\quad p'(x) = \frac{3}{4} + \frac{\cos(x)}{4x} = \mathbf{\frac{3x + \cos(x)}{4x}}$

$i'(x) = \mathbf{e^x + 5x^4}$ $\quad k'(a) = \mathbf{-e^a}$

2) a. $f'(x) = \mathbf{6x - 21 - \frac{12}{x}}$

b. $f'(x) = 6x - 21 - \frac{12}{x} = \frac{6x^2 - 21x - 12}{x} = \frac{3(2x^2 - 7x - 4)}{x}$ $\quad CQFD$

Pour préparer le contrôle…

1) $k'(x) = \mathbf{5e^x}$ $\quad C'(x) = \mathbf{\frac{1}{x}}$

$F'(t) = \mathbf{e^t + 2}$ $\quad n'(x) = \mathbf{\frac{1}{3x}}$

$d'(x) = \mathbf{2e^x + \frac{1}{x}}$ $\quad g'(x) = 2x - \frac{3}{x} = \mathbf{\frac{2x^2 - 3}{x}}$

$l'(n) = \frac{3}{2}e^n - \frac{5}{2} \times 2n = \mathbf{\frac{3}{2}e^n - 5n}$ $\quad \omega'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{\sin(x)}{2} = \mathbf{-\frac{2 + x^2\sin(x)}{2x^2}}$

2) *a.* $g'(x) = \mathbf{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2}}$

b. $g'(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2} = \frac{2x^2 + 2 \times 2x + 1}{2x^2} = \frac{2x^2 + 4x + 1}{2x^2}$ $\quad \boldsymbol{CQFD}$

Corrections Savoir Fd. 4

Corrigé Exercice 11

$f'(x) = -\mathbf{5}e^{-5x}$ $\quad g'(x) = -\mathbf{4}\sin(\mathbf{4}x + \mathbf{3})$

$h'(x) = \dfrac{-2}{-2x} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ $\quad i'(x) = 0 - 2(-3)e^{2-3x} = \mathbf{6}e^{\mathbf{2}-\mathbf{3}x}$

$\phi'(t) = \dfrac{1}{2}(2t)e^{t^2} = \boldsymbol{t}e^{\boldsymbol{t}^2}$ $\quad A'(x) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}\times 2x}{x - \frac{1}{2}x^2} = \dfrac{(1-x)}{\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)} \begin{matrix}\times 2\\ \times 2\end{matrix} = \dfrac{\mathbf{2} - \mathbf{2}\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}} = \dfrac{2(1-x)}{x(2-x)}$

$p'(x) = \mathbf{12}e^{\mathbf{3}x} + e^{-x}$ $\quad T'(x) = -\mathbf{4}\boldsymbol{x}\cos(\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})$

Pour préparer le contrôle…

$f'(x) = (\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{2})\cos(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x})$ $\quad \psi'(x) = +\mathbf{0,5}e^{\mathbf{1}-\mathbf{0,5}x}$

$\alpha'(x) = (\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1})e^{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}$ $\quad g'(t) = 2 - 2\times\dfrac{4}{4t} = \mathbf{2} - \dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{t}}$

$\beta'(x) = -\mathbf{4}\boldsymbol{x}e^{-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$ $\quad h'(x) = -4\times\dfrac{4}{4x+1} - 3 = \dfrac{-16 - 3(4x+1)}{4x+1} = \dfrac{\mathbf{-12}\boldsymbol{x} - \mathbf{17}}{\mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}}$

$j'(x) = \dfrac{-2\cos(2x+3)}{2} = -\cos(2x+3)$ $\quad b'(x) = 1000\times(-0{,}03\,e^{-0{,}03x}) = -\mathbf{30}e^{-\mathbf{0,03}x}$

Corrigé Exercice 12

1) $f'(x) = 5\times 3\times(3x-4)^4 = \mathbf{15}(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{4})^{\mathbf{4}}$

$g'(x) = 3\times(-2)\times(1-2x)^2 = -\mathbf{6}(\mathbf{1} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}$

$k'(x) = \dfrac{1}{6}\times 3\times 2\times(2x+5)^2 = (\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5})^{\mathbf{2}}$

$a'(x) = 4\times 2x\times(x^2+1)^3 = \mathbf{8}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{1})^{\mathbf{3}}$

2) $f'(x) = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}}}$ $\quad i'(x) = \mathbf{2} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}}}$

$m'(x) = \dfrac{\mathbf{-5}}{(\mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}}}$ $\quad p'(x) = -3\times\dfrac{-2}{(2x+1)^2} = \dfrac{\mathbf{6}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1})^{\mathbf{2}}}$

Pour préparer le contrôle…

1) $h'(x) = 4\times 2\times 6\times(6x+5)^1 = \mathbf{48}(\mathbf{6}\boldsymbol{x} + \mathbf{5})$

$i'(x) = -\dfrac{3}{2}\times 4\times\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}\right)^3 = -\mathbf{3}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{3}}$

$l'(x) = \dfrac{1}{4}\times 2\times(-2)(-2x-4)^1 = -(-2x-4) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}$

$c'(x) = -2\times 4\times 3x^2(x^3+1)^3 = -\mathbf{24}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} + \mathbf{1})^{\mathbf{3}}$

2) $j'(x) = \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+3}} = \dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{3}}}$ $\quad h'(x) = 2e^x + \dfrac{1}{6}\times\dfrac{-3}{2\sqrt{-3x}} = \mathbf{2}e^{\boldsymbol{x}} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\sqrt{-\mathbf{3}\boldsymbol{x}}}$

$b'(x) = \dfrac{-(-2x)}{(2-x^2)^2} = \dfrac{\mathbf{4}\boldsymbol{x}}{(\mathbf{2} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}}}$ $\quad c'(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{(4x)^2} = \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{4x^2} = \dfrac{\mathbf{16}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$

Corrections Savoir Fd. 5

Corrigé Exercice 13

1. a) $f\,'(x) = (1)(e^x) + (x)(e^x) = \boldsymbol{(1+x)e^x}$

b) $g'(x) = (3-3x^2)(e^x) + (3x-x^3)(e^x)$
$= \boldsymbol{(3+3x-3x^2-x^3)e^x}$

c) $h\,'(x) = (5)e^x + (5x-1)e^x = (5+5x-1)e^x = (4+5x)e^x$
CQFD

d) $i'(x) = (3)e^{-x} + 3x(-e^{-x}) = 3e^{-x} - 3xe^{-x} = \boldsymbol{(3-3x)e^{-x}}$

e) $j'(x) = (10)e^{2-0{,}3x} + (10x-50)(-0{,}3e^{2-0{,}3x})$
$= (10-3x+15)e^{2-0{,}3x} = \boldsymbol{(-3x+25)e^{2-0{,}3x}}$

f) $k'(x) = (4x)e^{-\frac{x}{2}} + (2x^2)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) = \boldsymbol{(-x^2+4x)e^{-\frac{x}{2}}}$

2. a) $f'(x) = 3\ln x + 3x \times \frac{1}{x} = \boldsymbol{3\ln x + 3}$

b) $g'(x) = 1(2\ln x - 1) + x\left(\frac{2}{x} + 0\right) = 2\ln x - 1 + \frac{2x}{x}$
$= \boldsymbol{2\ln x + 1}$

c) $h'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = \boldsymbol{2x\ln x + x} = x(2\ln x + 1)$

d) $l'(x) = 1\sin(x^2+1) + x(2x)\cos(x^2+1)$
$= \boldsymbol{\sin(x^2+1) + 2x^2\cos(x^2+1)}$

e) $j'(x) = 3\cos(3x)\cos(3x) + \sin(3x)(-3\sin(3x))$
$= 3\cos^2(3x) - 3\sin^2(3x) = \boldsymbol{3(\cos^2(3x) - \sin^2(3x))}$

f) $k'(x) = 0 + \left(0 - \frac{1}{x}\right)\ln(x-1) + (1-\ln x) \times \frac{1}{x-1}$
$= \boldsymbol{-\frac{1}{x}\ln(x-1) + \frac{1-\ln x}{x-1}}$

3. a) $k'(x) = 4x(\frac{x^3}{3} - 2x) + (2x^2-5)(x^2-2)$
$= \frac{4}{3}x^4 - 8x^2 + 2x^4 - 9x^2 + 10 = \boldsymbol{\frac{10}{3}x^4 - 17x^2 + 10}$

b) $h'(x) = (-1)\sqrt{x} + (2-x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\sqrt{x} + \frac{2-x}{2\sqrt{x}}$
$= -\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{2-x}{2\sqrt{x}}$ $= \frac{-2x+2-x}{2\sqrt{x}} = \boldsymbol{\frac{-3x+2}{2\sqrt{x}}}$

Pour préparer le contrôle …

1. a) $m'(x) = 3 + 2e^x + 2xe^x$
$= \boldsymbol{3 + 2(1+x)e^x}$

b) $f'(x) = 0 - (2e^x + (2x-4)e^x)$
$= -2e^x - 2xe^x + 4e^x$
$= 2e^x - 2xe^x = \boldsymbol{2(1-x)e^x}$
CQFD

c) $a'(x) = \boldsymbol{e^{-x}}$

d) $s'(x) = (-1)e^{1-x} + (1-x)(-e^{1-x})$
$= \boldsymbol{(x-2)e^{1-x}}$

2. a)
$m'(x) = 5 - \ln x - x \times \frac{1}{x} = \boldsymbol{4 - \ln x}$

b) $p'(x) = 2x\ln(2x) + x^2 \times \frac{2}{2x}$
$= \boldsymbol{2x\ln(2x) + x}$
$= x(2\ln(2x) + 1)$

c) $Y'(x) = 2x\sin(x-2) + x^2\cos(x-2)$
$= \boldsymbol{x(2\sin(x-2) + x\cos(x-2))}$

3. a)
$n'(x) = -6x(x+x^3) - 3x^2(1+3x^2)$
$= -6x^2 - 6x^4 - 3x^2 - 9x^4$
$= \boldsymbol{-15x^4 - 9x^2} = -3x^2(5x^2+3)$

b) $m'(x) = 6x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{12x(\sqrt{x})^2 + 3x^2}{2\sqrt{x}}$
$= \frac{12x^2+3x^2}{2\sqrt{x}} = \boldsymbol{\frac{15x^2}{2\sqrt{x}}}$

Corrigé Exercice 14

1. a) $j'(x) = \dfrac{e^x(2x+1) - e^x \times 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{\mathbf{2xe^x - e^x}}{\mathbf{(2x+1)^2}} = \dfrac{(2x-1)e^x}{(2x+1)^2}$

b) $h'(x) = \dfrac{-e^x(1+e^x) - e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2} = \dfrac{-e^x - e^{2x} - e^x + e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \dfrac{\mathbf{-2e^x}}{\mathbf{(1+e^x)^2}}$

c) $n'(x) = -\dfrac{3u'}{u^2} = -\dfrac{3(2e^{2x})}{(e^{2x}+2)^2} = -\dfrac{\mathbf{6e^{2x}}}{\mathbf{(e^{2x}+2)^2}}$

e) $w'(x) = \dfrac{e^x e^{3x} - (e^x - 1)(3e^{3x})}{(e^{3x})^2} = \dfrac{(e^x - 3e^x + 3)e^{3x}}{e^{6x}}$

$= \dfrac{(-2e^x + 3)e^{3x}}{e^{6x}} = \dfrac{\mathbf{-2e^x + 3}}{\mathbf{e^{3x}}}$

2. a) $j'(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(\ln x + 1)}{x^4} = \dfrac{\mathbf{x - 2x(\ln x + 1)}}{\mathbf{x^4}} = \dfrac{x(1 - 2\ln x - 2)}{x^4}$

$= \dfrac{-x(1 + 2\ln x)}{x^4} = -\dfrac{1 + 2\ln x}{x^3}$

b) $k'(x) = \dfrac{x}{4\ln x} = \dfrac{4\ln x - x \times \frac{4}{x}}{16(\ln x)^2} = \dfrac{4\ln x - 4}{16(\ln x)^2} = \dfrac{\mathbf{\ln x - 1}}{\mathbf{4(\ln x)^2}}$

c) $m'(x) = \dfrac{\frac{3}{x}(1-x) - (-1) \times 3\ln x}{(1-x)^2} = \dfrac{\frac{3(1-x)}{x} + 3\ln x}{(1-x)^2} = \dfrac{\mathbf{3(1-x) + 3x\ln x}}{\mathbf{x(1-x)^2}}$

d) $f'(x) = \dfrac{u'}{2} = \dfrac{2\cos(2x-4)}{2} = \cos(2x-4)$

3. a) $f'(x) = \dfrac{6x \times (1-x) - 3x^2 \times (-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{6x - 6x^2 + 3x^2}{(1-x)^2} = \dfrac{\mathbf{-3x(x-2)}}{\mathbf{(1-x)^2}}$

b) $g'(x) = \dfrac{2(3-4x) - (-4)(2x+1)}{(3-4x)^2} = \dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{(3-4x)^2}}$

c) $i(x) = \dfrac{3x^2 \times \sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times x^3}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{3x^2 \times 2\sqrt{x}\sqrt{x} - x^3}{2\sqrt{x} \times x}$

$= \dfrac{6x^3 - x^3}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{5x^3}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{\mathbf{5x^2}}{\mathbf{2\sqrt{x}}} = \dfrac{\mathbf{5x\sqrt{x}}}{\mathbf{2}}$

Pour préparer le contrôle …

1. a) $p'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2}$

$= \dfrac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \dfrac{\mathbf{e^x}}{\mathbf{(1+e^x)^2}}$

b) $u'(x) = \dfrac{3e^{3x}(2x+1) - 2e^{3x}}{(2x+1)^2}$

$= \dfrac{\mathbf{(6x+1)e^{3x}}}{\mathbf{(2x+1)^2}}$

2. a)

$k'(x) = \dfrac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x\ln x) - (x + \ln x)\left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right)}{(x\ln x)^2}$

$= \dfrac{x\ln x + \ln x - (x\ln x + x + (\ln x)^2 + \ln x)}{(x\ln x)^2}$

$= \dfrac{x\ln x + \ln x - x\ln x - x - (\ln x)^2 - \ln x}{(x\ln x)^2}$

$= \dfrac{\mathbf{-x - (\ln x)^2}}{\mathbf{(x\ln x)^2}}$

b) $g'(x) = \dfrac{-2\sin(2x)(x+1) - \cos(2x)(1)}{(x+1)^2}$

$= -\dfrac{(x+1)\sin(2x) + \cos(2x)}{(x+1)^2}$

3. $m'(x) = \dfrac{4x^3(x^3-1) - 3x^2(x^4+1)}{(x^3-1)^2}$

$m'(x) = \dfrac{\mathbf{x^6 - 4x^3 - 3x^2}}{\mathbf{(x^3-1)^2}}$

Corrections Savoir Fd. 6

Corrigé Exercice 15

1) a) $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$

b) $\Delta = 144 + 4\times3\times15 = 324$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{-12+18}{6} = 1$ et $x_2 = -5$

c) ⇒

d) avec $f(-5) = (-5)^3 + 6\times(-5)^2 - 15\times(-5) - 7 = 93$

et $f(1) = -15$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation $f(x)$		↗	93	↘	-15	↗	

2) a) $f'(x) = 1 + 0 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$ CQFD

b)

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x^2		$+$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	‖	↘	10	↗	

3) a) $g'(x) = -4xe^{-2x^2}$ et $g(0) = 1$

b) $g(-2) = e^{-8}$ et $g(1) = e^{-2}$

x	-2		0		1
$-4x$	$+$		0	$-$	
e^{-2x^2}	$+$		‖	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	e^{-8}	↗	1	↘	e^{-2}

4) a) On a : $f'(x) = 6x - 21 - \frac{12}{x} = \frac{6x^2-21x-12}{x}$

D'autre part :

$\frac{3(x-4)(2x+1)}{x} = \frac{3(2x^2-7x-4)}{x} = \frac{6x^2-21x-12}{x}$

On a donc bien $f'(x) = \frac{3(x-4)(2x+1)}{x}$

b) ⇒

x	1		4		10
$x-4$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$+$	‖	$+$	
x		$+$	‖	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15	↘	$-33 - 12\ln 4$ $\simeq -49{,}6$	↗	$93 - 12\ln 10$ $\simeq 65{,}4$

Pour préparer le contrôle …

1) a) $g'(x) = 2x^2 - 12x + 18$

b) $\Delta = 144 - 144 = 0 \Rightarrow x_0 = \dfrac{12}{4} = 3$

x	0		3		5
signe $g'(x)$		$+$	0	$+$	
variation $g(x)$	-1	↗	17	↗	$\frac{67}{3}$

avec $g(0) = -1$; $g(3) = \frac{2}{3}\times3^3 - 6\times3^2 + 18\times3 - 1 = 17$

et $g(5) = 2\times\frac{5^3}{3} - 6\times5^2 + 18\times5 - 1 = \frac{67}{3}$

2) a) $h'(x) = \dfrac{1}{4x^2} + 2 = \dfrac{1+8x^2}{4x^2}$ **CQFD**

b) On a $4x^2 > 0$ pour toutes valeurs de $x \neq 0$.
et $1 + 8x^2 > 0$ car c'est une somme de termes positifs (dont l'un est même strictement positif)

Donc $h'(x) > 0$ pour $x \neq 0$
En particulier, la dérivée est positive sur $]0;+\infty[$:
la fonction h est donc bien croissante sur $]0;+\infty[$

(vous pouvez aussi faire un tableau… mais c'est plus fatigant ;-)

3) a) $A'(t) = 10 \times (-0{,}1t + 0{,}8)e^{-0{,}05t^2+0{,}8t}$

$= (-t + 8)e^{-0{,}05t^2+0{,}8t}$

b)

t	0		8		20
$-10t + 80$		+	0	−	
$e^{-0{,}05t^2+0{,}8t}$		+	|	+	
$A'(t)$		+	0	−	
$f(x)$	**10**	↗	$\mathbf{10e^{3,2}}$	↘	$\mathbf{10e^{-4}}$

4) a) $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - \frac{2x}{x^2+1} = x - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^3+x-2x}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{x^3-x}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{x(x^2-1)}}{\boldsymbol{x^2+1}}$ CQFD

b)

x	0		1		5
x	0	+	|	+	|
$x^2 - 1$	|	−	0	+	|
$x^2 + 1$	|	+	|	+	|
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	**0**	↘	$\mathbf{\frac{1}{2} - \ln 2}$	↗	$\mathbf{\frac{25}{2} - \ln 26}$

Corrigé Exercice 16

1) a. $f'(x) = \boldsymbol{2x^3 - 4x^2 - 10x + 12}$

b. On développe : $2(x-3)(x^2+x-2) = 2(x^3+x^2-2x-3x^2-3x+6) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = \boldsymbol{f'(x)}$ *CQFD*

2) a. Pour $x^2 + x - 2$, on a $\Delta = 9$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$2(x-3)$		−	|	−	|	−	0	+	
$x^2 + x - 2$		+	0	−	0	+	|	+	
$f'(x)$		−	**0**	+	**0**	−	**0**	+	
$f(x)$		↘	$-\frac{73}{3}$	↗	$\frac{43}{6}$	↘	$-\frac{7}{2}$	↗	

Corrigé Exercice 17

1) a. $b'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x^2 - 9)$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$5x^2$		+	|	+	0	+	|	+	
$x^2 - 9$		+	0	−	|	−	0	+	
$b'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$b(x)$		↗	162	↘	0	↘	-162	↗	

pour $x \in [-3\ ;\ 0]$, la fonction b a pour minimum 0 et pour maximum 162
on a bien $\mathbf{0 \leq\ b(x)\ \leq 162}$

Pour préparer le contrôle …

1) a. $t'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$ CQFD

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$4x$		−	|	−	0	+	|	+	
$x^2 - 4$		+	0	−	|	−	0	+	
$t'(x)$		−	**0**	+	**0**	−	**0**	+	
$t(x)$		↘	-10	↗	6	↘	-10	↗	

La fonction t admet pour minimum −10 (atteint pour 2 valeurs de x : -2 et 2) ⇒ $\boldsymbol{m = -10}$
On a, pour tout réel x, on a $\boldsymbol{t(x) \geq -10}$

La suite de la correction est sur la page suivante

2) a. $f'(x) = 5e^{-0,2x} + (5x-5) \times (-0,2e^{-0,2x})$
$f'(x) = (5 - x + 1) \times e^{-0,2x} = (-x+6)e^{-0,2x}$
CQFD

b.

x	0		6		20
$-x+6$		+	0	–	
$e^{-0,2x}$		+	|	+	
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	-5	↗	$25e^{-1,2}$	↘	$95e^{-4}$

c. Pour $x \in [0;20]$, la fonction f admet pour maximum $f(6) = 25e^{-1,2} \simeq 7,53$

on a $f(x) \leq 25e^{-1,2}$ et par élargissement
$f(x) < 8$

3) a) $h'(x) = \dfrac{1-2x}{x-x^2}$

b) $-x^2 + x = x(-x+1)$ donc $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$-2x+1$		+	0	–	
$-x^2+x$	0	+	|	+	0
$h'(x)$	||	+	0	–	||
$h(x)$	||	↗	$\ln\left(\frac{1}{4}\right)$	↘	||

c) $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$
D'après le tableau de variation, la fonction h admet **un maximum de $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ en $x = \frac{1}{2}$**

2) a. $\phi'(t) = -2te^{1-t^2}$

$\phi(-1) = e^{1-1} = e^0 = 1 = \phi(1)$ et $\phi(0) = e^1 = e$

t	-1		0		1
$-2t$		+	0	–	
e^{1-t^2}		+	|	+	
$\phi'(x)$		+	0	–	
$\phi(x)$	1	↗	e	↘	1

b. D'après le tableau de variation, pour $t \in [-1;1]$, la fonction ϕ a pour minimum 1 et pour maximum $e \simeq 2,71$ ⇒ on a donc $1 \leq \phi(t) \leq e$ et par élargissement $1 \leq \phi(t) \leq 3$

3) $g'(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{x^2-9}{x^2}$

x	$-\infty$	-6	-3	-1	0		3	$+\infty$
x^2-9	+		0	–	|	–	0	+
x^2	+		|	+	|	+	|	+
$g'(x)$	+		0	–	||	–	0	+
$g(x)$		$-\frac{3}{2}$	0		−4		15	

pour $x \in [-6\,;\,-1]$, le minimum de g est -4 et le maximum est 0
⇒ pour $x \in [-6\,;\,-1]$, on a $-4 \leq g(x) \leq 0$
ce qui revient à dire que $\boldsymbol{g(x) \in [-4\,;\,0]}$

Corrigé Exercice 18

1) OUI À partir de la courbe on peut avoir le tableau de variation de f et donc le tableau de signe de f'
En comparant avec la seconde courbe, la fonction dérivée semble bien correspondre : positive sur $[-2\,;\,0]$ et sur $[4\,;\,6]$ et négative sur $[0\,;\,4]$…

x	-2		0		4		6
$f(x)$	$-1,5$	↗	2	↘	-2	↗	2
$f'(x)$		+	0	–	0	+	

2) Question 1 – **Réponse B**

D'après la représentation graphique de g, elle est croissante sur $[-2;0]$ et $[4;6]$ et décroissante sur $[0;2]$. Sa dérivée g' doit donc être positive sur $[-2;0]$ et $[4;6]$ et négative sur $[0;2]$.

Question 2 – **Réponse D**

C'est le nombre de point d'intersection de la courbe de g avec l'axe des abscisses…

Question 3 – **Réponse C**

Cette fois c'est le nombre de tangentes horizontales de la courbe de g (ou le nombre d'intersection de la courbe de g' avec l'axe des abscisses sur le graphique de la réponse B de la question 1) …

Corrections Savoir Fd. 7

Corrigé Exercice 19

$f(-4) = \mathbf{-2}$ *et* $f'(-4) = \mathbf{3}$
$f(3) = \mathbf{4}$ *et* $f'(3) = \mathbf{-\frac{1}{2}}$

$g(-3) = \mathbf{-4}$ *et* $g'(-3) = \mathbf{0}$
$g(4) = \mathbf{2}$ *et* $g'(4) = \mathbf{1}$

$h(-3) = \mathbf{-1}$ *et* $h'(-3) = \mathbf{-\frac{5}{2}}$
$h(2) = \mathbf{1}$ *et* $h'(2) = \mathbf{2}$
$h(5) = \mathbf{3}$ *et* $h'(5) = \mathbf{0}$

Pour préparer le contrôle …

a. $k'(-4) = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$ $k'(-1) = \mathbf{0}$ $k'(2) = -\frac{2}{2} = \mathbf{-1}$

b. $m'(-3) = -\frac{3}{1} = \mathbf{-3}$ $m(-3) = \mathbf{3}$ $m'(-1) = \mathbf{0}$ $m(3) = \mathbf{1}$ $m'(2) = \mathbf{0}$

c. $p'(-4) = \mathbf{-\frac{1}{2}}$ $p(1) = \mathbf{-3}$ $p'(1) = \mathbf{2}$ $p'(3) = \mathbf{-2}$

Corrigé Exercice 20

1) $T_{-2}: y = 0(x+2) + 2$ soit $y = 2$ $T_0: y = 3x - 5$ $T_3: y = -(x-3) + 0$ soit $y = -x + 3$

2) a. $g'(x) = 2x + \frac{1}{x-2}$

b. on a $g(3) = 9 + \ln(1) = 9$ et $g'(3) = 7$ donc $T: y = 7(x-3) + 9$ soit $y = 7x - 12$

Pour préparer le contrôle …

1) $T_{-1}: y = 2(x+1) + \frac{1}{3}$ $T_{\frac{1}{2}}: y = -4$ **2)** On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = -\frac{1}{4}$ donc $T: y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

Corrigé Exercice 21

1) a. On a : $g'(x) = 2x\ln(x-2) + \frac{x^2}{x-2}$.

b. On a : $g(3) = 9 \times 0 = 0$ et d'autre part $g'(3) = 2 \times 3 \times 0 + \frac{9}{1} = 9$

L'équation de la tangente T est donc donnée par : $y = g(3) + g'(3)(x-3) \Leftrightarrow \mathbf{y = 9x - 27}$

2) a. $j'(x) = \frac{6x(x+2) - (3x^2 - 9)}{(x+2)^2} = \frac{3x^2 + 12x + 9}{(x+2)^2}$ avec $\Delta = 36$; $x_1 = -1$; $x_2 = -3$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$3x^2+12x+9$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$j'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$j(x)$		↗	-18	↘	||	↘	-6	↗	

b. pour $x > -2$, la fonction j a pour minimum -6 . On a bien, pour $x > -2$: $\boldsymbol{j(x) \geq -6}$

c. On a $j(1) = \frac{3-9}{3} = -2$ et $j'(1) = \frac{3+12+9}{3^2} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

donc la tangente en 1 a pour équation : $\mathcal{T}_1 : y = \frac{8}{3}(x-1) - 2 \Leftrightarrow y = \frac{8}{3}x - \frac{14}{3}$

3) a. $f(0)=3\,;f'(1)=0\,;f'(-3)=0$ et $f'(0)=3$
$\mathcal{T}:\ y=f'(0)(x-0)+f(0)\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{y=3x+3}$
$f(x)=0\ \Rightarrow\ S=\{-1{,}7;1{,}8\}$

b. $f(x)=(3-x^2)e^x$ → On a $f(0)=(3-0)e^0=3\times1=\mathbf{3}$
La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$
$f'(x)=-2xe^x+(3-x^2)e^x=(\boldsymbol{-x^2-2x+3})\boldsymbol{e^x}$
Et : $f'(0)=3e^0=3\,;\ f'(1)=(-1-2+3)e=0e=0$ et $f'(-3)=(-9+6+3)e^{-3}=0\times e^{-3}=0$
L'équation de la tangente s'obtient de la même façon : $\mathcal{T}:\ y=f'(0)(x-0)+f(0)\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{y=3x+3}$

$Pour\ f(x)=0\ \Leftrightarrow\ (3-x^2)e^x=0$ Comme la fonction exponentielle ne s'annule jamais, on a :
$f(x)=0\ \Leftrightarrow\ 3-x^2=0\ \Leftrightarrow\ x^2=3\ \Leftrightarrow\ x=-\sqrt{3}\ ou\ x=\sqrt{3}$
Donc $\boldsymbol{S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}}$ c e qui donne les valeurs approchées $-1{,}7\ et\ 1{,}7$

Corrigé Exercice 22

1) a. $g'(1)=2$ **b.** $g'(x)=3ax^2-1$ donc $g'(1)=3a-1=2$ donc d'après le (1), on a $\boldsymbol{a=1}$

c. $g(1)=3$, Or $g(1)=1\times1^3-1+b=3\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{b=3}$ **d.** $\boldsymbol{g(x)=x^3-x+3}$

2) On a : $h(x)=a\ln(2x+3)+b$ et $h'(x)=a\times\frac{2}{2x+3}=\boldsymbol{\frac{2a}{2x+3}}$
D'une part : $h(-1)=4\Rightarrow a\ln1+b=4\ \Rightarrow0+b=4\Rightarrow\boldsymbol{b=4}$
D'autre part : $h'(0)=1\Rightarrow\frac{2a}{3}=1\Rightarrow a=\frac{3}{2}$. ⇒ Conclusion : $\boldsymbol{h(x)=\frac{3}{2}\ln(2x+3)+4}$

Pour préparer le contrôle…

1) a. $f(1)=\frac{3}{2}$ et $f'(2)=0$
b. $f(x)=ax+b\ln x$ donc $f(1)=a+b\ln1=a$ Comme $f(1)=\frac{3}{2}$ on en déduit que $\boldsymbol{a=\frac{3}{2}}$
On a donc $f(x)=\frac{3}{2}x+b\ln x$
On dérive : $f'(x)=\frac{3}{2}+\frac{b}{x}$ et $f'(2)=\frac{3+b}{2}$ Comme $f'(2)=0$ on en déduit que $3+b=0\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{b=-3}$
On a finalement $\boldsymbol{f(x)=\frac{3}{2}x-3\ln x}$

2) On a $f(0)=-1\ \Leftrightarrow\ a\times0^2+b\times0+c=-1\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{c=-1}$
$f(1)=-2\ \Leftrightarrow\ a\times1^2+b\times1-1=-2\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a+b=-1}$
et $f(-2)=13\ \Leftrightarrow\ a\times(-2)^2+b\times(-2)-1=13\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{4a-2b=14}$

On cherche donc à résoudre le système $\begin{cases}a+b=-1\\4\boldsymbol{a-2b=14}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1-b\\4(-1-b)-2b=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1-b\\-6b=18\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1-(-3)=2\\b=-3\end{cases}$ On a donc $\boldsymbol{f(x)=2x^2-3x-1}$