Corrections Savoir Fi.3

Corrigé Exercice 10

1) $a)\ \int_{-3}^{4} f(t)dt = \int_{-3}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{4} f(t)dt = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{J} = -2 + 3 = \mathbf{1}$

$b)\ \int_{-3}^{1} g(t)dt\ = \int_{-3}^{4} g(t)dt - \int_{1}^{4} g(t)dt = \boldsymbol{K} - \boldsymbol{L} = -1 - 1 = \mathbf{-2}$

$c)\ \int_{1}^{4}\big(f(t) + g(t)\big)dt = \int_{1}^{4} f(t)dt + \int_{1}^{4} g(t)dt = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{L} = 3 + 1 = \mathbf{4}$

$d)\ \int_{-3}^{1}(f - g)(t)dt = \int_{-3}^{1} f(t)dt - \int_{-3}^{1} g(t)dt\ = -2 - (-2) = \mathbf{0}$

$e)\ \int_{-3}^{4}(4g - 3f)(t)dt\ = \mathbf{4}\boldsymbol{K} - \mathbf{3}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}) = 4 \times (-1) - 3 \times 1 =\ \mathbf{-7}$

2) $a)\ \ \int_{0}^{1}\big(e^{x^2} - 1\big)dx + \int_{0}^{1} dx +\ \int_{1}^{2} e^{x^2}\ dx =\ \int_{0}^{1}\big(e^{x^2} - 1 + 1\big)dx +\ \int_{1}^{2} e^{x^2}\ dx = \int_{0}^{1} e^{x^2}dx +\ \int_{1}^{2} e^{x^2}\ dx$

$$= \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{e^{x^2}dx}$$

$b)\ \ \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\ dx - \int_{0}^{-2} \frac{1}{t^2+1}\ dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2}\ dt + \int_{-2}^{0} \frac{1}{t^2+1}\ dt = \int_{\mathbf{-2}}^{\mathbf{1}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t^2}+\mathbf{1}}\ \boldsymbol{dt}$

$c)\ \sum_{k=1}^{100} \int_{k}^{k+1}\ \frac{1}{x}dx = \int_{1}^{2}\ \frac{1}{x}dx + \int_{2}^{3}\ \frac{1}{x}dx + \cdots + \int_{100}^{101}\ \frac{1}{x}dx = \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{101}}\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}$

3) a. $I + J = \int_{0}^{\pi} \cos^2(t)\ dt + \int_{0}^{\pi} \sin^2(t)\ dt = \int_{0}^{\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t))\ dt = \int_{0}^{\pi} 1\ dt = [t]_0^{\pi} = \boldsymbol{\pi}$

Et $I - J = \int_{0}^{\pi} (\cos^2(t) - \sin^2(t))\ dt = \int_{0}^{\pi} \cos(2t)\ dt = \left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi} = \left(\frac{1}{2}\sin(2\pi)\right) - \left(\frac{1}{2}\sin(0)\right) = \mathbf{0}$

b. On a $\begin{cases} I + J = \pi \\ I - J = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2I = \pi \\ I = J \end{cases}$ donc $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

4)

$$I + J = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + 2}\ dx + \int_0^1 \frac{1}{e^x + 2}\ dx = \int_0^1 \left(\frac{e^x + 1}{e^x + 2} + \frac{1}{e^x + 2}\right)\ dx = \int_0^1 \frac{e^x + 2}{e^x + 2}\ dx = \int_0^1\ dx = \mathbf{1}$$

$$I - J = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + 2}\ dx - \int_0^1 \frac{1}{e^x + 2}\ dx = \int_0^1 \left(\frac{e^x + 1}{e^x + 2} - \frac{1}{e^x + 2}\right)\ dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2}\ dx$$

$$= [\ln(e^x + 2)]_0^1 = (\ln(e^1 + 2)) - (\ln(e^0 + 2)) = \ln(e + 2) - \ln 3 = \ln\left(\frac{e + 2}{3}\right)$$

On a donc $\begin{cases} I + J = 1 \\ I - J = \ln\left(\frac{e+2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = 1 - I \\ I - 1 + J = \ln\left(\frac{e+2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = 1 - I \\ I = \frac{1}{2}\left(1 + \ln\left(\frac{e+2}{3}\right)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{1} - \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{e}+\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)\right) \\ I = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{1} + \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{e}+\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)\right) \end{cases}$

Corrigé Exercice 11

1) a) Une exponentielle est toujours positive, donc $e^{-x^3} > 0\ \Rightarrow\ \int_{-\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{e^{-x^3}}\ \boldsymbol{dx} > 0$

b) Pour $t \geq 2$, on a $(1 - t)\ln t < 0$ donc $\int_{\mathbf{2}}^{\boldsymbol{e}}(\mathbf{1} - \boldsymbol{t})\ \mathbf{ln}\,\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{dt} < 0$

t	0		1		$+\infty$
$1-t$	|	$+$	0	$-$	
$\ln t$	|		0	$+$	

c) $\Delta = 16; x_1 = 3\ et\ x_2 = -1$ du signe de a à l'extérieur des racines, donc négatif sur $[-1; 3]\ \Rightarrow$ Sur $[0; 2]$, $x^2 - 2x - 3 < 0$ donc $\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x^2} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3})\boldsymbol{dx} < 0$

d) Pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ on a $0 \leq \cos\theta \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1 - \cos\theta \geq 0$

donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\boldsymbol{\theta} - 1) d\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) a. $x^2 \leq x \Leftrightarrow x^2 - x \leq 0$ Or, d'après le tableau de signe, pour $0 \leq x \leq 1$, on a bien $x^2 - x \leq 0$

Alors pour $0 \leq x \leq 1$ on a : $x^2 \leq x \Leftrightarrow -x^2 \geq -x$ et comme la fonction exponentielle est croissante, $e^{-x^2} \geq e^{-x}$

Donc, avec la propriété de positivité de l'intégrale, on a bien $\int_0^1 \boldsymbol{e^{-x^2} dx} \geq \int_0^1 \boldsymbol{e^{-x}\ dx}$

b. Pour $t \in [0;1]$, on a $t^2 \geq t^3 \Leftrightarrow 1 + t^2 \geq 1 + t^3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^3}$

On a alors, par positivité de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\ dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\ dt$ et $I \leq J$

3) a. D'une part. $t \geq 0 \Rightarrow t^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + t^2 \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

Reste à démontrer que $1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow$ On cherche le signe de la différence *(méthode souvent efficace)*

$1 - t^2 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{(1-t^2)(1+t^2)-1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-t^2-t^4-1}{1+t^2} = \frac{-t^4}{1+t^2} \leq 0$ car $t \geq 0$

$1 - t^2 - \frac{1}{1+t^2} \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2}}$ **Conclusion** : on a bien, pour tout $t \in [0;1]$: $\mathbf{1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1}$

b. On en déduit que $\int_0^1 (1 - t^2) dt \leq I \leq \int_0^1 1\ dt$

Or $\int_0^1 (1 - t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{2}{3}$ et $\int_0^1 1\ dt = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$ Donc $\mathbf{\frac{2}{3} \leq I \leq 1}$

4) a. $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2 \Leftrightarrow \mathbf{1 \leq \sqrt{1 + \cos^2(x)} \leq \sqrt{2}}$

b. $\Rightarrow \int_0^{\pi} 1\ dx \leq I \leq \int_0^{\pi} \sqrt{2}\ dx \Rightarrow \boldsymbol{\pi \leq I \leq \sqrt{2}.\pi}$

Corrigé Exercice 12

a. Pour $-6 \leq x \leq 1$, on a $f(x) > 0$ donc, $\int_{-6}^{1} \boldsymbol{f(t)dt} > 0$

Pour $3 \leq x \leq 5$, on a $f(x) < 0$ donc $\int_3^5 \boldsymbol{f(t)dt} < 0$

b. Pour $-6 \leq x \leq 1$, on a $4 \leq f(x) \leq 7$ donc, $\int_{-6}^{1} 4\ dt \leq \int_{-6}^{1} f(t)dt \leq \int_{-6}^{1} 7\ dt$

$\Leftrightarrow 4 \times (1 - (-6)) \leq \int_{-6}^{1} f(t)dt \leq 7 \times (1 - (-6)) \Leftrightarrow \mathbf{28 \leq \int_{-6}^{1} f(t)dt \leq 49}$

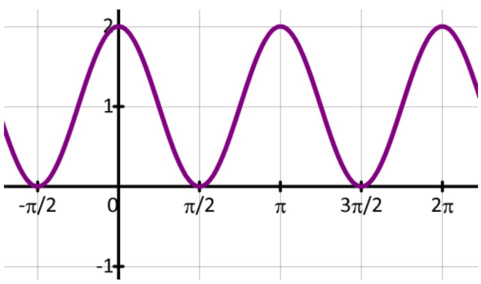
Pour $3 \leq x \leq 5$, on a $-3 \leq f(x) \leq -1$ donc, $\int_3^5 (-3)\ dt \leq \int_3^5 f(t)dt \leq \int_3^5 (-1)\ dt$

$\Leftrightarrow -3 \times 2 \leq \int_3^5 f(t)dt \leq -1 \times 2 \Leftrightarrow \mathbf{-6 \leq \int_3^5 f(t)dt \leq -2}$

Corrigé Exercice 13

1) $\boldsymbol{A = 4I}$

2) La fonction $h(x) = \cos(2x) + 1$ est représentée ci-contre.



a. $\boldsymbol{h(x + \pi)} = \cos(2(x + \pi)) + 1 = \cos(2x + 2\pi) + 1$
$= \cos(2x) + 1 = \boldsymbol{h(x)}$

$\Rightarrow$ **La fonction est π-périodique**

$\boldsymbol{h}(-\boldsymbol{x}) = \cos(-2x) + 1 = \cos(2x) + 1 = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow$ **La fonction est paire**

b. La fonction est paire, donc $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} h(\theta)d\theta = J$ et $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(\theta)d\theta = \mathbf{2}\boldsymbol{J} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\pi}$

La fonction est π-périodique, donc $B = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} h(\theta)d\theta = \int_{\frac{3\pi}{2}-2\pi}^{2\pi-2\pi} h(\theta)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} h(\theta)d\theta = \boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

Par translation, on a $C = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} h(\theta)d\theta = \mathbf{5}\boldsymbol{J} = \frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$