Savoir Fi. 6 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Exercice 18 : Lien entre F, primitive, intégrale et fonction f

1) Soit F la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $F(x)=\int_2^x (1-t^2)\,dt$

a. Déterminer $F(2)$ **b.** Déterminer F'

2) Soit ϕ et ψ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $\phi(x)=\int_0^x t^2e^t\,dt$ et $\psi(x)=(x^2-2x+2)e^x$

a. Démontrer que ϕ et ψ sont deux primitives de la même fonction f que l'on précisera.

b. En déduire la relation qui existe entre ϕ et ψ

c. Déterminer la primitive F de f telle que $F(1)=0$

Plus loin...

3) Soit ϕ et ψ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $\phi(x)=\int_1^x \ln u\ du$ et $\psi(x)=x(\ln x-1)$

a. Démontrer que ϕ et ψ sont deux primitives de la même fonction f que l'on précisera.

b. En déduire la relation qui existe entre ϕ et ψ

c. Déterminer la primitive F de f telle que $F(1)=1$

Exercice 19 : Lien entre le signe de f et la variation de F

1) Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=\int_0^x (1-\ln t)dt$

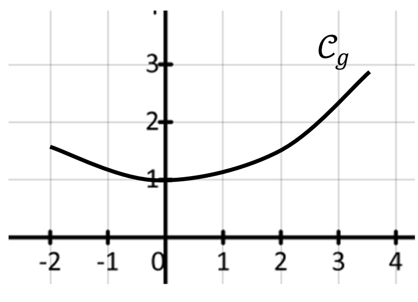
a. Déterminer $F(0)$ et F'

b. Déterminer le signe de F' et en déduire le sens de variation de F

2) Soit Φ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\Phi(a)=\int_0^a (\ln t+1)dt$

a. Déterminer $\Phi(0)$ et Φ'

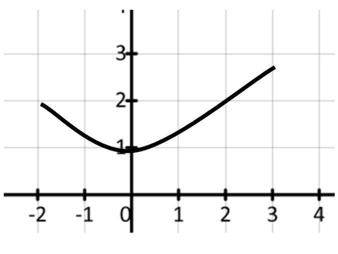
b. Déterminer le signe de Φ' et en déduire le sens de variation de Φ



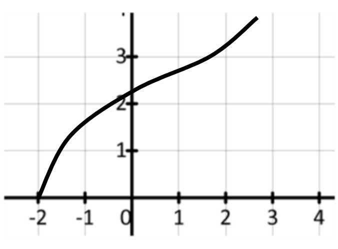
3) La fonction g est une fonction continue et positive sur $[-2;+\infty[$ représentée par la courbe $\mathcal{C}_g$ ci-contre.

G est la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par : $G(x)=\int_{-2}^x g(t)dt$

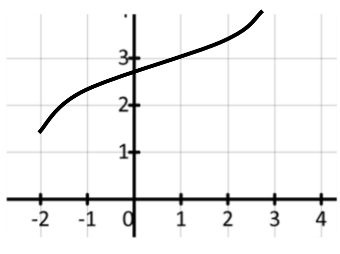
Laquelle des courbes ci-dessous peut représenter la fonction G ? Justifier.



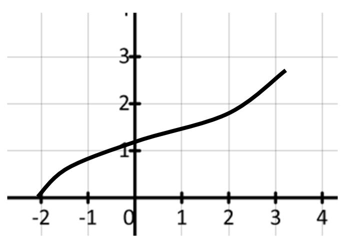
Courbe 1



Courbe 2



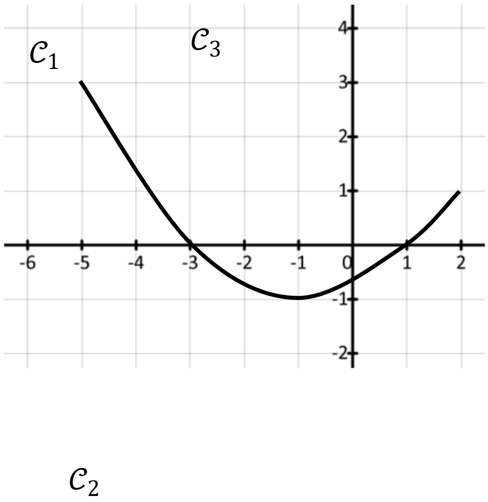
Courbe 3



Courbe 4

Plus loin...

3) On a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f sur $\mathbb{R}$, celle de sa dérivée f' et celle d'une de ses primitives, F sur $\mathbb{R}$.
Identifier ces 3 courbes.



Exercice 20 : Étude d'une primitive

1) On considère la fonction G défini sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

Pour chacune des proposition suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier.

a. $G(0) = 1$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = e^{-x^2}$

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x)$ est positif

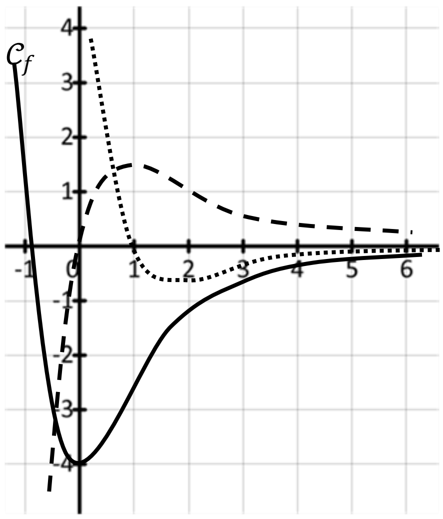
d. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x)$ est croissante

2) La fonction f continue sur $[-5; 2]$ est représentée ci-contre.
Pour tout $x \in [-5; 2]$, on définit $F(x)$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

a. Donner le signe de $F(x)$ pour $-3 \leq x \leq 0$

b. Même question pour $0 \leq x \leq 1$

c. Déterminer les variations de F



3) On donne les fonctions H et I définies sur $\mathbb{R}$ par :
$H(x) = \int_1^x e^{-2t}\,dt$ et $I(x) = \int_x^0 \frac{2}{1-t}\,dt$

a. Déterminer une expression de $H(x)$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$.

b. Déterminer une expression de $I(x)$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} I(x)$.

Exercice 21 : Extrait bac

On pose $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2-x}\,dx$

1) a. Étudier le signe et le sens de variation de la fonction $f : x \longmapsto \frac{e^{-x}}{2-x}$ sur $[0; 1]$

b. Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

2) Soit $J = \int_0^1 (x+2)e^{-x}dx$ et $K = \int_0^1 x^2 f(x)dx$

a. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $G(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction $g(x) = (x+2)e^{-x}$ sur $[0; 1]$. En déduire J.

b. De la question 1.b, déduire que $\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$

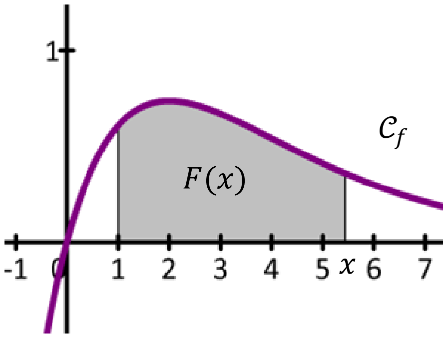
c. Démontrer que $J + K = 4I$

d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près

Exercice 22 : On arrive même à caser du TVi...

1) On définit la fonction F sur $[1;\ 100]$ par :

$$F(x) = \int_1^x te^{-0,5t}\ dt$$



a. Déterminer F' et en déduire les variations de F sur $[1;\ 100]$

b. Donner une valeur approchée à la calculatrice de $F(100)$.
Montrer qu'il existe une valeur de x pour laquelle $F(x) = 3$.

Plus loin...

2) On note $\mathcal{A} = \int_0^{e-2} \frac{2}{(x+2)}\ dx$ et on définit sur $[0; e-2]$ la fonction I par : $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{2}{(x+2)}\ dx$

a. Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$

b. Déterminer une expression de $I(\alpha)$ en fonction de α

c. Montrer que la fonction I est strictement croissante sur $[0; e-2]$

d. En déduire qu'il existe une unique valeur de α pour laquelle on a $I(\alpha) = \frac{1}{2}\mathcal{A}$ et en donner une valeur approchée au centième près.