Corrections Savoir Fi. 5

Corrigé Exercice 16

1) a. $2 < \mathcal{D} < 3$

b. $G'(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x + 1) + \ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x + 1 + \ln x}{x} = \dfrac{2\ln x + 1}{x} = g(x)$

$\Rightarrow G$ est bien une primitive de g

c. $\mathcal{D} = \int_1^3 g(x)dx = [\ln(x)[\ln(x)+1]]_1^3 = \boldsymbol{ln3} \times (\mathbf{ln3} + \mathbf{1})$ donc $\mathcal{D} \simeq$ **2,3**

2) a. $\boldsymbol{\phi}'(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{2x}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{x}{3\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x} = \sqrt{x} = \boldsymbol{f(x)} \Rightarrow \boldsymbol{\phi}$ **est bien une primitive de $\boldsymbol{f}$**

b. La fonction f est positive sur $[1; 4]$ donc en unité d'aire :

$$A = \int_1^4 f(x)\ dx = \phi(4) - \phi(1) = \frac{2\times 4}{3}\sqrt{4} - \frac{2}{3}\sqrt{1} = \frac{8}{3}\times 2 - \frac{2}{3} = \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{u.a.}$$

Sachant que $1\ u.a. = 6\ cm^2$ on a en cm² : $A = \frac{14}{3} \times 6 = \mathbf{28}\ \boldsymbol{cm^2}$

3) a. On a : $A = \int_{-1}^3 (g(x) - f(x))dx = \int_{-1}^3 (4x + 6 - 2x^2)dx$

b. On obtient : $A = \left[2x^2 + 6x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^3 = \frac{64}{3}$

4) a. On pose $t = -2x$ pour $x \geq 0$ on a alors :

$e^{-2x} \geq 1 - 2x \iff e^{-2x} + x \geq 1 - x \iff f(x) \geq 1 - x \iff f(x) - (-x+1) \geq 0$

Donc $\boldsymbol{C_f}$ est toujours au-dessus de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ pour $x \geq 0$, en particulier pour $x \in [0; 1]$

b. $\mathcal{A} = \int_0^1 (f(x) - (-x+1))\ dx = \int_0^1 (e^{-2x} + 2x - 1)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + x^2 - x\right]_0^1$

$= \left(-\frac{1}{2}e^{-2} + 1^2 - 1\right) - \left(-\frac{1}{2}e^0 - 0\right) = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{1} - \boldsymbol{e^{-2}})$

Corrigé Exercice 17

a. $g'(x) = -10e^{-x} + 10(-x-1)(-e^{-x}) = (-10 + 10x + 10)e^{-x} = 10xe^{-x} = f(x)$

Donc g est une primitive de f sur $[1; 8]$

b. La fonction f est strictement positive sur $[1; 8]$ donc l'aire de la partie hachurée est :

$\mathcal{A} = \int_1^8 f(x)dx = g(8) - g(1) = (10(-8-1)e^{-8}) - (10(-1-1)e^{-1}) = \mathbf{20}\boldsymbol{e^{-1}} - \mathbf{90}\boldsymbol{e^{-8}}$

On a alors $M = 300 + 50 \times \mathcal{A} = 300 + 50(20e^{-1} - 90e^{-8})$

Soit $M \simeq 666{,}37 \Rightarrow$ **Le montant du devis de l'artiste est de 666,37 €**