Corrections Savoir Fi. 4

Corrigé Exercice 14

1) a. $\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{2x+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 1 = \mathbf{\frac{1}{2}\ln 5}$ *et* $\mu \simeq 0{,}8$

b. $\mu = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} 4x^3 - 3x^2 + 1\,dx = \frac{1}{2}[x^4 - x^3 + x]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\big((1-1+1)-(1+1-1)\big) = \mathbf{0}$

2) **a.** $G'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x = g(x)$ donc G est bien une primitive de g

b. $\mu = \frac{1}{8}\int_{-1}^{2} xe^x\,dx = [\ (x-1)e^x]_{-1}^{2} = 1\mathrm{e}^2 - (-2e^{-1}) = \mathrm{e}^2 + \frac{2}{e}$ *et* $\mu \simeq 8{,}12$

3) a. $\mu = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} \sin x\ dx = \frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\cos 0 - \cos\pi) = \frac{1}{\pi}\big(1-(-1)\big) = \mathbf{\frac{2}{\pi}}$

b. $\mu = \frac{1}{10-4}\int_4^{10} \frac{5}{t^2}\ dt = \frac{1}{6}\left[-\frac{5}{t}\right]_4^{10} = \frac{1}{6}\left(-\frac{5}{10}+\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{6}\times\frac{3}{4} = \mathbf{\frac{1}{8}}$

c. $\mu = \frac{1}{5-0}\int_0^5 e^x dx = \frac{1}{5}[e^x]_0^5 = \frac{1}{5}(e^5 - e^0) = \mathbf{\frac{1}{5}(e^5-1)}$ et $\mu \simeq \mathbf{29{,}48}$

Corrigé Exercice 15

1) $\mu = \frac{1}{4-2}\int_2^4 50e^{-0{,}5t}\,dt = \frac{1}{2}[-100e^{-0{,}5t}]_2^4 = \frac{1}{2}(-100e^{-2}+100e^{-1}) = 50(-e^{-2}+e^{-1}) \simeq \mathbf{11{,}627}$

La population moyenne est d'environ 11 627 insectes

2) $\mu = \frac{1}{100-(-100)}\int_{-100}^{100} 15\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{\frac{-x}{100}}\right)dx = \frac{15}{200}\left[100e^{\frac{x}{100}} - 100e^{-\frac{x}{100}}\right]_{-100}^{100}$

$= \frac{1\,500}{200}\left(\left(e^{\frac{100}{100}} - e^{-\frac{100}{100}}\right) - \left(e^{\frac{-100}{100}} - e^{-\frac{-100}{100}}\right)\right) = \frac{15}{2}\left(e - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + e\right) = \frac{15}{2}\left(2e - \frac{2}{e}\right) = \mathbf{15\left(e-\frac{1}{e}\right)}$

$\mu \simeq 35{,}3$ $\Rightarrow$ **La hauteur moyenne de la ligne électrique est d'environ 35,3 m**

3) a. $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{t}) = +5e^{-t} - (5te^{-t})' = 5e^{-t} - 5e^{-t} + 5te^{-t} = 5te^{-t} = \boldsymbol{f(t)}$ donc F est bien une primitive de f

b. $\mu_1 = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(t)dt = [F(t)]_0^1 = F(1) - F(0) = (-5e^{-1} - 5e^{-1}) - (-5e^0 - 0) = -\mathbf{\frac{10}{e} + 5}$

$\mu_1 \simeq 1{,}32$ **Pendant la 1ère heure, la concentration moyenne est d'environ 1,32 g.L^{-1}**

$\mu_2 = \frac{1}{2-0}\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2}\big(F(2)-F(0)\big) = \frac{1}{2}\big((-5e^{-2} - 5e^{-2}) - (-5e^0 - 0)\big) = \frac{1}{2}\left(-\mathbf{\frac{10}{e^2} + 5}\right)$

$\mu_2 \simeq 1{,}83$ **Pendant les 2 premières heures, la concentration moyenne est d'environ 1,83 g.L^{-1}**

5) $\mu = \frac{1}{4}\int_0^4 20 + 3e^{0,3x}\ dx = [20x + 10e^{0,3x}]_0^4 = 80 + 10e^{1,2} - 10 = 70 + 10e^{1,2}$

$\mu \simeq 103 \ \Rightarrow$ Il y a eu en moyenne 103 malades par mois touchés par l'épidémie

6) a. $\boldsymbol{f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)dt}}$

b. $f(t+2\pi) = 5\cos\left(t + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 5\cos\left(t + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = f(t)$ **La fonction f est bien 2π-périodique.**

c. On a $f^2(t) = 25\cos^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{25}{2}\left(1 + \cos\left(2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \frac{25}{2}\left(1 + \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$\boldsymbol{f_{eff}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{25}{2}(1 + cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)dt}} = \boldsymbol{\frac{5}{2\sqrt{\pi}}}\sqrt{\left[t + \frac{1}{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{2\pi}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{5}{2\sqrt{\pi}}}\sqrt{\left(2\pi + \frac{1}{2}\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)} = \boldsymbol{\frac{5}{2\sqrt{\pi}}}\sqrt{2\pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\pi}} = \boldsymbol{\frac{5}{\sqrt{2}}}$$