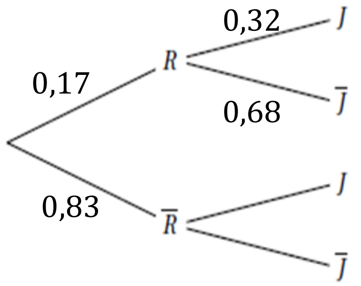
SUJET de BAC BLANC – CORRECTION 1

Exercice 1 **5 points**

Partie A :

1.



2. $P(R \cap J) = P(R) \times P_R(J) = 0{,}17 \times 0{,}32 = 0{,}0544$.

3. On nous donne : $P(J) = 0{,}11$ et on cherche $P(J \cap \bar{R})$.

Or : $P(J) = P(J \cap R) + P(J \cap \bar{R}) \Rightarrow 0{,}11 = 0{,}0544 + P(J \cap \bar{R}) \Rightarrow P(J \cap \bar{R}) = 0{,}11 - 0{,}0544 = 0{,}0556$.

La probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est donc bien égale à 0,056 à 10^{-3} près.

4. On a :

$$P_{\bar{R}}(J) = \frac{P(\bar{R} \cap J)}{P(\bar{R})} = \frac{0{,}0056}{0{,}83} \simeq 0{,}067$$

La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc de 0,067 à 10^{-3} près.

Partie B :

1. Il s'agit d'une répétition de 50 tirages avec la même probabilité (17%) de choisir une personne utilisant régulièrement les transports en commun à chaque tirage (épreuve de Bernoulli). X est le nombre de personnes utilisant régulièrement les transports en commun donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}17$.

2. $P(X = 5) = \binom{50}{5} \times 0{,}17^5 \times 0{,}83^{45} = 2\,118\,760 \times 0{,}17^5 \times 0{,}83^{45} \simeq 0{,}069$

Il y a donc environ 6,9% de chances d'obtenir exactement 5 personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes tirées au hasard.

3. On calcule $P(X < 13) = P(X \leq 12) \simeq 0{,}929$. L'affirmation est donc fausse.

4. Avec $n = 47$, on a $P(X \leq 12) > 0{,}95$ et avec $n = 48$, on a $P(X \leq 12) < 0{,}95$.

Il faut donc interroger au maximum 47 personnes pour qu'il y ait plus de 95% de chance d'en obtenir moins de 13 qui utilisent régulièrement les transports en commun.

5. $E(X) = 50 \times 0{,}17 = 8{,}5$.

Il y a donc en moyenne 8,5 personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

Exercice 2 **5 points**

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$ On a donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2+2 = 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. ABC est donc rectangle en A.

2. a. On calcule :

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2-2 = 0 \qquad \overrightarrow{AC}.\vec{n} = -4+5-1 = 0$$

Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (ils sont orthogonaux). $\vec{n}$ étant orthogonal à ces deux vecteurs, il est donc orthogonal au plan (ABC).

b. (ABC) a donc une équation de la forme :

$$2x+y-z+d=0$$

avec $d = -2x_A - y_A + z_A = -4+1+0 = -3$.
(ABC) a donc pour équation :

$$2x+y-z-3=0$$

c. On a :

$$2x_S + y_S - z_S - 3 = 0+1-4-3 = -7 \neq 0 \Rightarrow S \notin (ABC)$$

Donc les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. a. (d) est une droite orthogonale à (ABC) donc $\vec{n}$ est un de ses vecteurs directeurs.

On obtient donc : $d : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 4-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b. $H \in d$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x_H = 2t \\ y_H = 1+t \\ z_H = 4-t \end{cases}$

$H \in (ABC)$ donc :

$$2x_H + y_H - z_H - 3 = 0 \Leftrightarrow 4t+1+t-4+t-3 = 0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$$

D'où $\begin{cases} x_H = 2t = 2 \\ y_H = 1+t = 2 \\ z_H = 4-t = 3 \end{cases} \Rightarrow H(2;\ 2;\ 3)$

4. La hauteur de $SABC$ issue de S est (SH) et on a $\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow SH = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$.

Sa base correspondante est le triangle ABC rectangle en A avec $AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$.

L'aire de la base est donc $a = \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{5}{2}\sqrt{6}$. On obtient donc :

$$V = \frac{a \times SH}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2}\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 5$$

Le volume du tétraèdre $SABC$ est donc égal à 5.

5. a. On a $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ d'où $SA = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

b. On a : $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos\widehat{ASB}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix} = 2\sqrt{6} \times \sqrt{17}\cos\widehat{ASB}$$

$$\Leftrightarrow 6+4+8 = 2\sqrt{102}\cos\widehat{ASB}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{ASB} = \frac{9}{\sqrt{102}} \Rightarrow \widehat{ASB} = \cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{102}} \simeq 27{,}0°$$

Exercice 3 **5 points**

Partie A

1. $a_1 = 1000 \times 0{,}9 + 250 = 1150$. Il y aura 1150 abonnés en 2021.

2. Perdre 10%, c'est garder 90%, cela revient donc chaque année à multiplier par 0,9, puis s'ajoutent 250 nouveaux abonnés. on a donc bien : $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 250$.

3. On constate que $a_{15} < 2200 < a_{16}$. C'est donc à partir de 2036 que le nombre d'abonnés dépassera 2 200.

4. a. On a : $u_{n+1} = a_{n+1} - 2500 = 0{,}9a_n + 250 - 2500 = 0{,}9a_n - 2250$
Et d'autre part : $0{,}9u_n = 0{,}9(a_n - 2500) = 0{,}9a_n - 2250$
On a donc $u_{n+1} = 0{,}9u_n$
(u_n) est donc géométrique de raison 0,9 avec $u_0 = a_0 - 2500 = -1500$.

b. On a donc $u_n = -1500 \times 0{,}9^n$ or $a_n = u_n + 2500 \Rightarrow a_n = -1500 \times 0{,}9^n + 2500$. CQFD

c. $0{,}9 \in [0;1[\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$. Par limite de somme, on a donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2500$.
Le nombre d'abonnés va donc finir par atteindre 2500.

Partie B

1. $b_1 = 1000 - 10(2 \times 0 - 19) = 1190$

2. Initialisation : Pour $n = 0$, on a $b_n = b_0 = 1000$ et $-10n^2 + 200n + 1000 = 1000$
Donc l'égalité $b_n = -10n^2 + 200n + 1000$ est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Si pour $n = p$ cette égalité est vraie, alors :

$$b_p = -10p^2 + 200p + 1000$$

Alors pour $n = p + 1$, on a :
$b_n = b_{p+1} = b_p - 10(2p - 19) = -10p^2 + 200p + 1000 - 20p + 190 = -10p^2 + 180p + 1190$
et

$$\begin{aligned} &-10n^2 + 200n + 1000 \\ &= -10(p+1)^2 + 200(p+1) + 1000 \\ &= -10(p^2 + 2p + 1) + 200p + 200 + 1000 \\ &= -10p^2 - 20p - 10 + 200p + 1200 \\ &= -10p^2 + 180p + 1190 \end{aligned}$$

Alors $b_n = -10n^2 + 200n + 1000$ pour $n = p + 1$
Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a bien $b_n = -10n^2 + 200n + 1000$

3. On constate à l'aide d'un tableau de valeurs que lorsque n est entre 0 et 20, b_n atteint un maximum de 2000 pour $n = 10$. Selon ce modèle, le nombre d'abonnés ne pourra donc pas dépasser les 2000.

Exercice 4 **5 points**

1. On a $h'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x-1)e^x = (x^2-3)e^x$.
$x^2 - 3$ est négatif sur $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$ et positif ailleurs.

$$h''(x) = 2xe^x + (x^2-3)e^x = (x^2+2x-3)e^x \quad \text{et} \quad (x+3)(x-1) = x^2+2x-3$$

$\Rightarrow$ **Réponse c**

2. On a $g(1) = \frac{1}{e} = e^{-1}$ et $g'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$ donc g' est négative sur $]-\infty; 1]$ et positive sur $[1; +\infty[$.
g admet donc un maximum en $x = 1$.

$\Rightarrow$ **Réponse d**

3. f'' s'annule en changeant de signe 3 fois.

$\Rightarrow$ **Réponse a**

4. On a $z'\left(\frac{1}{5}\right) < 0$ et $z'(1) = e > 0$ avec $z''(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$ donc z' est strictement croissante et passe une seule fois par 0. Elle est donc négative puis positive. Donc pour la fonction z :

$\Rightarrow$ **Réponse a**

5. $a'(x) = 0 - 2x\ln x - x^2 \times \frac{1}{x} = -2x\ln x - x = -x(1 + 2\ln x)$

$\Rightarrow$ **Réponse b**