Savoir Fd. 2 : Logarithme népérien

Entraînement 1

1) On donne les fonctions définies par $f(x) = 3x - 1 + 2\ln(x^2 - 3)$ et $g(x) = (x+e)\left(\ln x + \ln\left(\frac{e}{x}\right)\right)$

Calculer $f(2)$ et $g(e)$ et simplifier au maximum (sans valeur approchée)

2) Soit la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = (2x-6)\ln x$.
Déterminer le tableau de signe de h sur son ensemble de définition

Entraînement 2

1) On donne les fonctions définies par $l(x) = 4\ln(3x) - \ln(4-x)$ et $m(x) = \ln\left(\frac{2}{x}\right) - 3\ln(2x)$

Calculer $l(1)$ et $m\left(\frac{1}{2e}\right)$ et simplifier au maximum (sans valeur approchée)

2) Soit la fonction p définie sur $]0;+\infty[$ par $p(x) = -3x(1-\ln x)$.
Déterminer le tableau de signe de p sur son ensemble de définition

Entraînement 3

1) On donne la fonction h définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = (2-x)\ln(x+1) + 1$

Calculer $h(0)$ et $h\left(\frac{1}{e} - 1\right)$ et simplifier au maximum (sans valeur approchée)

2) Soit la fonction i définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par $i(x) = \frac{\ln x}{1-x}$
Déterminer le tableau de signe de i sur son ensemble de définition

Entraînement 4

1) On donne la fonction ϕ définie sur $]-1;+\infty[$ par $\phi(x) = \frac{\ln(2-x)}{1+x^2}$

Calculer$\phi(1)$ et $\phi\left(2 - \frac{1}{e}\right)$ et simplifier au maximum (sans valeur approchée)

2) Soit la fonction w définie sur $]0;4[$ par $w(x) = (2x-8)\ln x$
Déterminer le tableau de signe de w sur son ensemble de définition

Entraînement 5

1) On donne la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{x} + 1$

Calculer $f(1)$ et $f(2-e)$ et simplifier au maximum (sans valeur approchée)

2) Soit la fonction g définie sur $]0;e[$ par $g(x) = (1-x^2)\ln x$
Déterminer le tableau de signe de g sur son ensemble de définition

Corrections Savoir Fd. 2

Corrigé Entraînement n°1

1) $f(2) = 3 \times 2 - 1 + 2\ln(2^2 - 3) = 5 + 2\ln 1 = \mathbf{5}$

et $g(e) = (e + e)\left(\ln e + \ln\left(\frac{e}{e}\right)\right) = 2e(1 + \ln 1) = \mathbf{2e}$

2)

x	0		$\mathbf{1}$		$\mathbf{3}$		$+\infty$
$2x-6$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
$\ln x$	$\mid\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$h(x)$	$\mid\mid$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Corrigé Entraînement 2

1) $l(1) = 4\ln(3) - \ln(4-1) = 4\ln 3 - \ln 3 = \mathbf{3\ln 3}$

$m\left(\frac{1}{2e}\right) = \ln\left(\frac{2}{\left(\frac{1}{2e}\right)}\right) - 3\ln\left(2 \times \frac{1}{2e}\right) = \mathbf{\ln(4e) - 3\ln\left(\frac{1}{e}\right)}$

2) $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$

x	0		$\boldsymbol{e}$		$+\infty$
$-3x$		$-$	$\mid$	$-$	
$1-\ln x$	$\mid\mid$	$+$	0	$-$	
$p(x)$	$\mid\mid$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Corrigé Entraînement 3

1) $h(0) = 2\ln(1) + 1 = 2 \times 0 + 1 = \mathbf{1}$

$h\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \left(2 - \frac{1}{e} + 1\right)\ln\left(\frac{1}{e} - 1 + 1\right) + 1 = \mathbf{\left(3 - \frac{1}{e}\right)\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1}$

2)

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	$\mid\mid$	$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$	
$i(x)$	$\mid\mid$	$-$	$\mid\mid$	$-$	

Corrigé Entraînement 4

1) $\phi(1) = \frac{\ln(1)}{1+1^2} = \mathbf{0}$ et $\phi\left(2 - \frac{1}{e}\right) = \frac{\ln(1/e)}{1+\left(\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{\ln(1/e)}{1+\frac{1}{e^2}} = \mathbf{\frac{e^2\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{e^2+1}}$

2)

x	0		$\mathbf{1}$		4
$2x-8$		$-$	$\mid$	$-$	0
$\ln x$	$\mid\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$
$w(x)$	$\mathbf{\mid\mid}$	$+$	$\mathbf{\mid\mid}$	$-$	$\mathbf{0}$

Corrigé Entraînement 5

1) $f(1) = \frac{\ln 1}{1} + 1 = \mathbf{1}$ et $f(2-e) = \frac{\ln(2-(2-e))}{2-e} + 1 = \frac{\ln(e)}{2-e} + 1 = \frac{1}{2-e} + \frac{2-e}{2-e} = \boldsymbol{\frac{3-e}{2-e}}$

2)

x	0		$\mathbf{1}$		e
$1-x^2$		$+$	$\vert$	$-$	$\vert$
$\ln x$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$
$w(x)$	$\vert\vert$	$-$	$\mathbf{0}$	$-$	