Savoir Fd. 7 : Tangentes

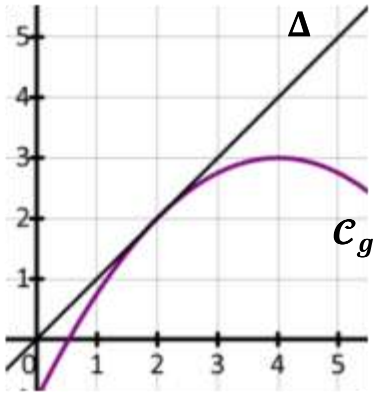
Entraînement 1

1) Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3\ \ln(x) - 2$.

On donne sa dérivée : $g'(x) = 2x^2(3\ln(x) + 1)$

Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + 2x + b$, où a et b sont deux nombres réels.
On donne ci-contre sa représentation graphique $\mathcal{C}_g$, ainsi que la droite Δ qui est la tangente en $x = 2$ à la courbe $\mathcal{C}_g$



a. Déterminer graphiquement $g(2)$ et $g'(2)$

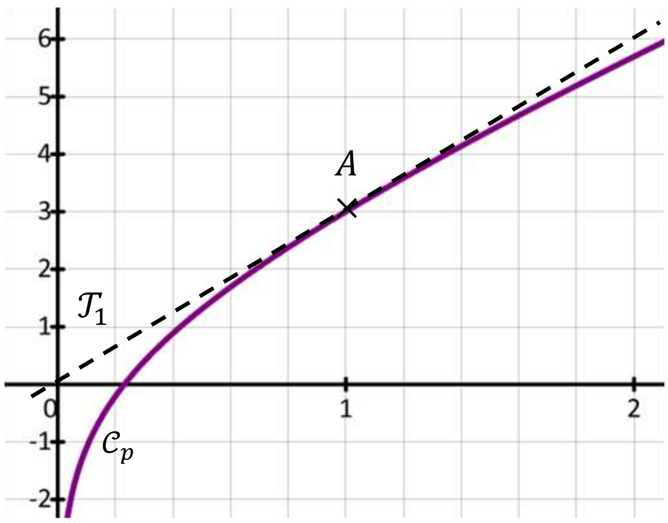
b. En déduire les valeurs de a et de b

Entraînement 2

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par : $g(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$. On donne sa dérivée $g'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse −2.

2) On définit sur $\left]\frac{1}{e}\,;\frac{4}{e}\right[$ la fonction $p(x) = ax + \ln(bx)$ où a et b sont deux nombres réels.
On donne ci-contre la représentation graphique $\mathcal{C}_p$ de p. On sait que le point $A(1; 3)$ appartient à $\mathcal{C}_p$.
On a aussi tracé $\mathcal{T}_1$ la tangente à $\mathcal{C}_p$ au point d'abscisse 1.



a) Déterminer $p'(1)$ et en déduire a.

b) Déterminer l'expression algébrique de $p(x)$

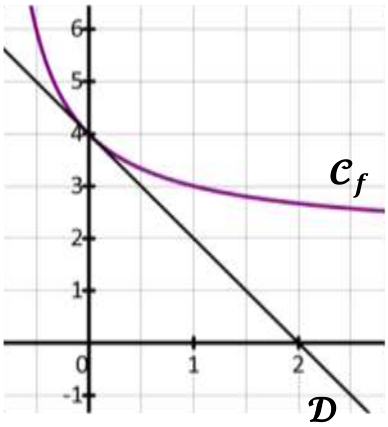
Entraînement 3

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x) = (x^2 + x)\ln x + 3$

On donne sa dérivée : $f'(x) = 1 + x + (2x + 1)\ln x$

Écrire une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse 1.

2) Soit f une fonction définie sur $]-1;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{ax+b}{1+x}$, où a et b sont deux nombres réels.
On donne ci-contre sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$, ainsi que la droite Δ qui est la tangente en $x = 0$ à la courbe $\mathcal{C}_f$



a. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$

b. En déduire les valeurs de a et de b

Entraînement 4

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x}$. On donne sa dérivée : $f'(x) = \frac{4x^3+1}{x^2}$

Écrire une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse 1.

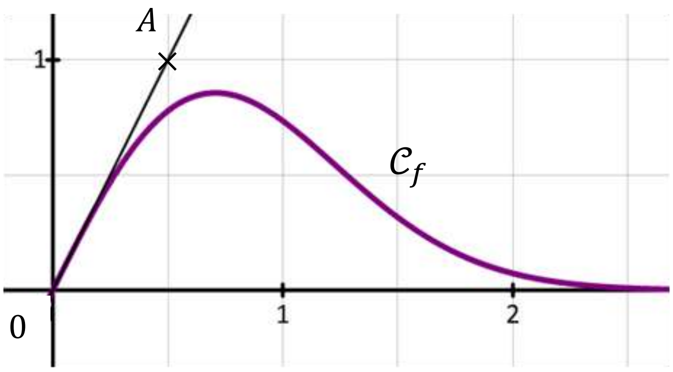
2) La courbe $\mathcal{C}_f$ est la représentation graphiques de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-x^2}$$

où a et b sont des réels.
On admet que sa dérivée f' s'écrit :

$$f'(x) = (-2ax^2 - 2bx + a)e^{-x^2}$$

On donne le point $A\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$. On sait que O appartient à $\mathcal{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point O.



Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

Corrections Savoir Fd. 7

Corrigé Entraînement n°1

1) L'équation de T est donnée par : $y = g(a) + g'(a)(x - a)$
Avec $a = 1$, on a $g(a) = g(1) = 2 \times 1^3 \ \ln(1) - 2 = 2 \times 0 - 2 = -2$
et $g'(a) = g'(1) = 2 \times 1^2(3\ln(1) + 1) = 2 \times (0 + 1) = 2$

Donc ici, l'équation de T est : $y = g'(1) \times (x - 1) + g(1) \Leftrightarrow y = 2(x - 1) + (-2)$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{y = 2x - 4}$

2) **a.** $g(2) = 2$ et $g'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

b. On dérive : $g'(x) = 2ax + 2$ avec $g'(2) = 1 \Rightarrow 2a \times 2 + 2 = 1 \Leftrightarrow 4a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$
donc $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + b$
Et $g(2) = 2 \Rightarrow -\frac{1}{4} \times 2^2 + 2 \times 2 + b = 2 \Leftrightarrow 3 + b = 2 \Leftrightarrow b = -1$ donc $\boldsymbol{g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1}$

Corrigé Entraînement 2

1) L'équation de T est donnée par : $y = g(a) + g'(a)(x - a)$
Avec $a = -2$, On a $g(-2) = \frac{7}{-1} = -7$ et $g'(-2) =$ Erreur ! Signet non défini. $-\frac{3}{(-1)^2} = -3$

Donc ici, l'équation de T est : $y = g'(-2) \times \left(x - (-2)\right) + g(-2) \Leftrightarrow y = -3(x + 2) - 7$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{y = -3x - 13}$

2) a) graphiquement $p'(1) = 3$ et par ailleurs : $p'(x) = a + \frac{b}{bx} = a + \frac{1}{x}$ donc $p'(1) = a + 1$
donc $a + 1 = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 2}$ On a donc $p(x) = 2x + \ln(bx)$

b) On sait que $p(1) = 3$ et $p(1) = 2 + \ln b$ donc $2 + \ln b = 3 \Leftrightarrow \ln b = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{b = e}$
En conclusion : $\boldsymbol{p(x) = 2x + \ln(ex)}$

Corrigé Entraînement 3

1) L'équation de T est donnée par : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$
Avec $a = 1$, $f(a) = f(1) = 0 + 3 = 3$ Et $f'(a) = f'(1) = 1 + 1 + 0 = 2$
Donc ici, l'équation de T est : $y = 3 + 2(x - 1) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 2x + 1}$

2) **a.** $f(0) = 4$ et $f'(0) = -2$

b. On a $f(0) = \frac{0+b}{1+0} = b$ donc $\boldsymbol{b = 4}$ et on a $f(x) = \frac{ax+4}{1+x}$
On a alors $f'(x) = \frac{a(1+x)-(ax+4)\times 1}{(1+x)^2} = \frac{a-4}{(1+x)^2}$ et $f'(0) = a - 4 = -2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 2}$ donc $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x+4}{1+x}}$

Corrigé Entraînement 4

1) L'équation de T est donnée par : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

Avec $a = 1$, $f(a) = f(1) = 2 - 1 = 1$ Et $f'(a) = f'(1) = \frac{4+1}{1} = 5$

Donc ici, l'équation de T est : $y = 1 + 5(x-1) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 5x - 4}$

2) On a $f(0) = (a \times 0 + b)e^0 = b \times 1 = b$ et $f'(0) = (-2a \times 0 - 2b \times 0 + a)e^0 = a \times 1 = a$

Or, on détermine graphiquement : $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{0,5} = 2$

On a donc $f(0) = b = 0$ et $f'(0) = a = 2$

La fonction est donc : $f(x) = \boldsymbol{2xe^{-x^2}}$