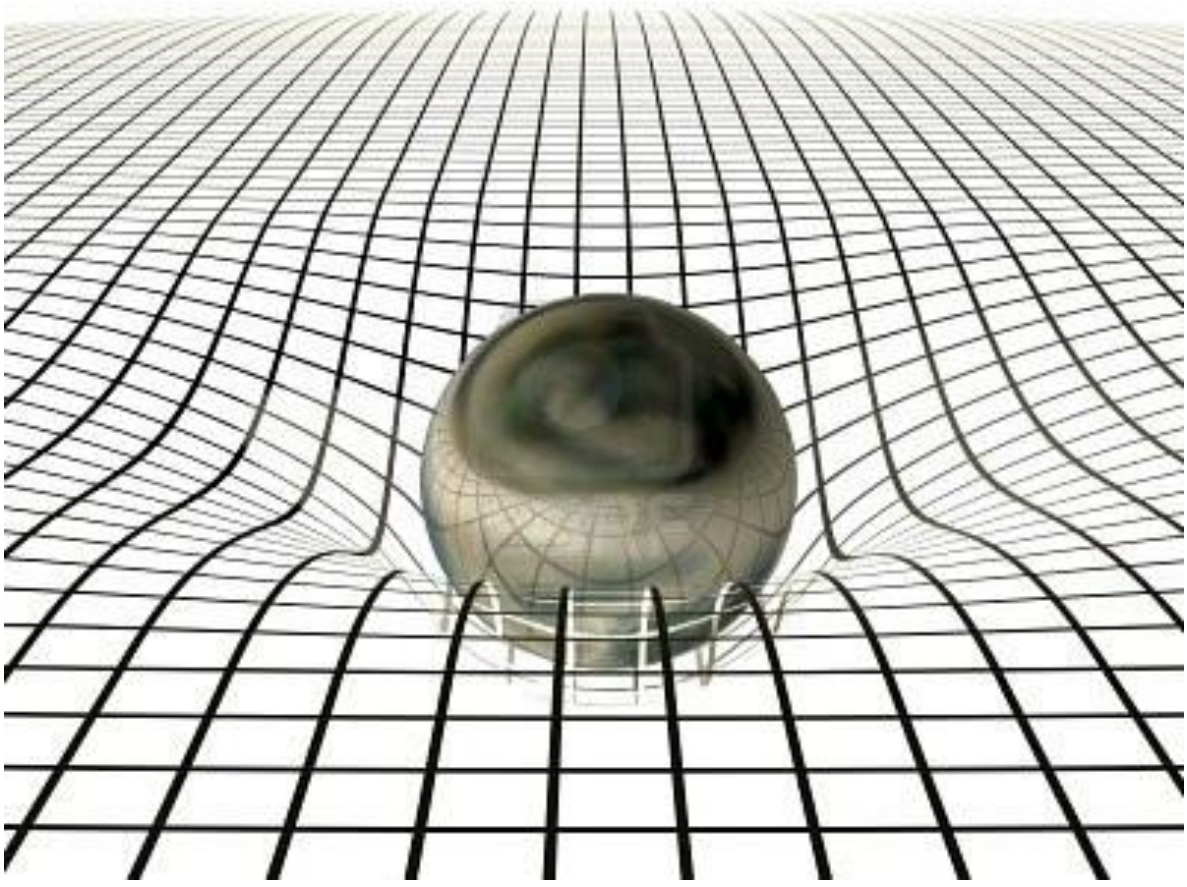
T ALE SPÉ MATHS

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE ÉPISODE 2

EQUATIONS DE DROITES ET DE PLANS

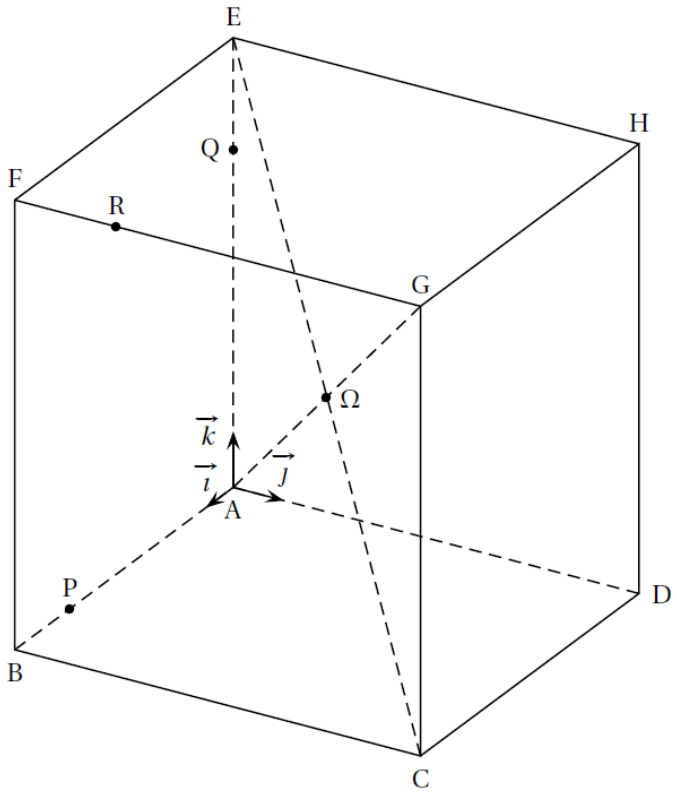


ENTRAÎNEMENTS SUJETS BAC

LES PLUS RÉCENTS

1. ASTE - JUIN 2021 - CLASSIQUE

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 8 cm et de centre Ω.
Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.
On se place dans le repère orthonormé $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ avec : $\vec{\imath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$; $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8;\ 2\ ;\ 8)$.
Donner les coordonnées des points P et Q.

2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ -5\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).

3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.

3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}\ ;\frac{2}{3}\ ;\frac{14}{3}\right)$.

4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

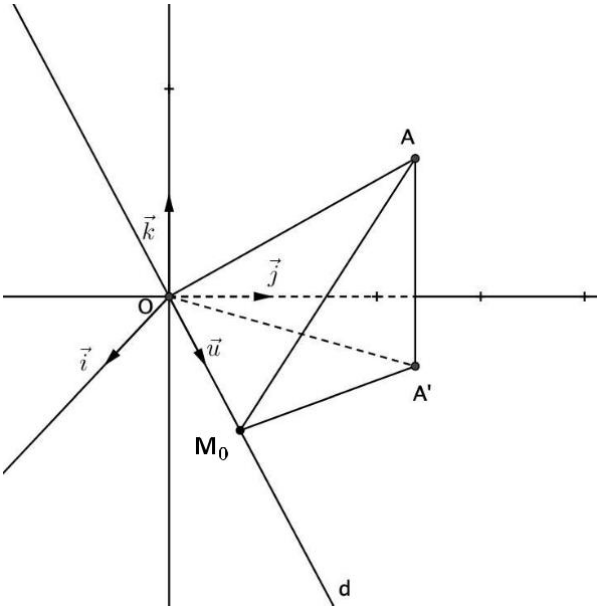
2. MÉTROPOLE - JUIN 2021 - MOINS CLASSIQUE

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(1; 3; 2)$
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- la droite$d$ passant par O et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t; t; 0)$.

a. Démontrer que la longueur AM vérifie la relation suivante :

$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$$

b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2; 2; 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1; 3; 0)$.

a. Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O.
[Quand on a

b. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

DES PLUS ANCIENS, MAIS TOUJOURS D'ACTUALITÉ

3. PONDICHERY - JUIN 2016 (NON SPÉCIALITÉ - 5 PTS)

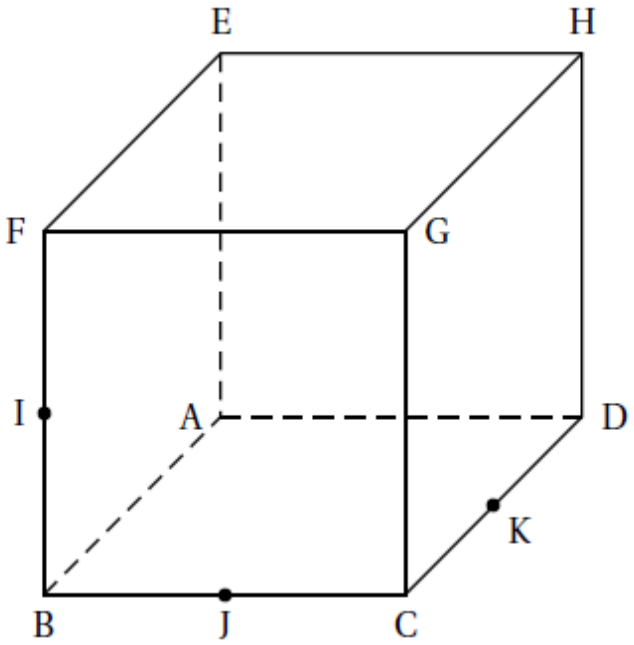
$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1. Le point I est le milieu du segment $[BF]$. Le point J est le milieu du segment $[BC]$. Le point K est le milieu du segment $[CD]$.

Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L
- l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH)



Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.
a. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$
b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

4. Démontrer que pour ce point $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$:
a. N appartient au plan (IJK).
b. La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

4. LIBAN - MAI 2016 (COMMUN - 4 PTS)

On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I.

Une représentation en perspective de ce solide est donnée ci-dessous.

Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AK})$

1. a. Montrer que $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$

En déduire les coordonnées des points I, E et F.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

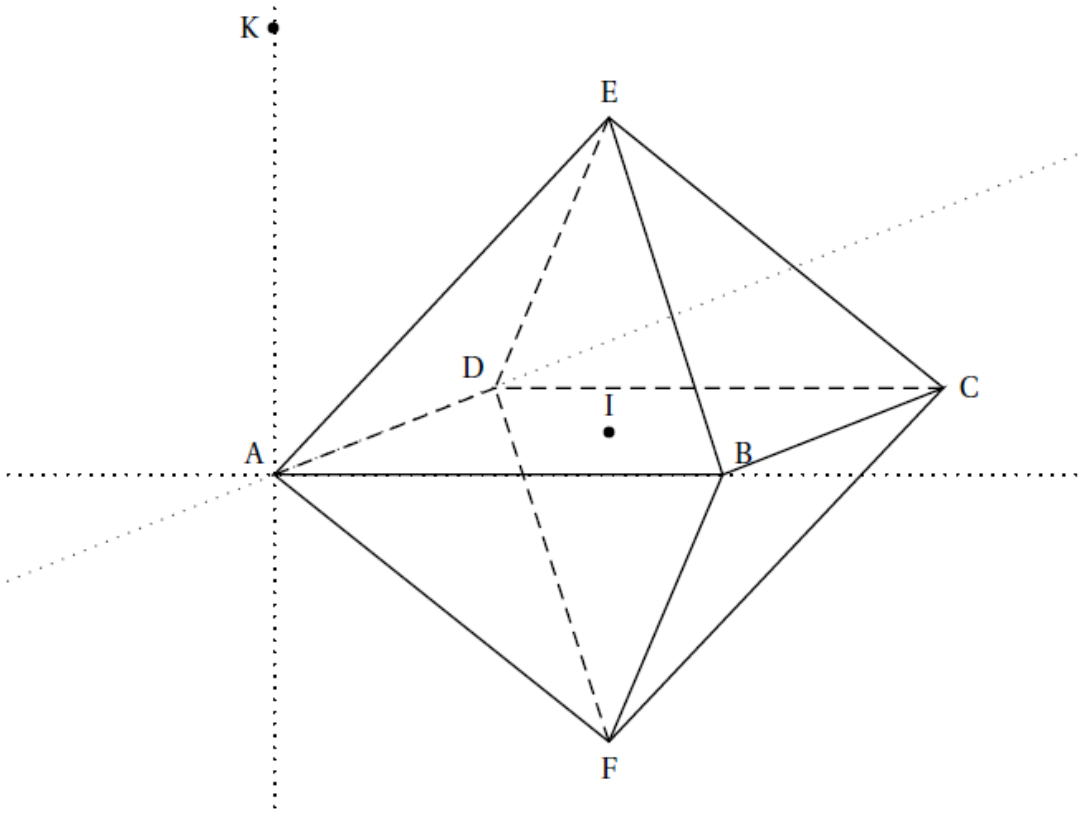
c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment $[DF]$ et N celui du segment $[AB]$.

a. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

b. Quelle est l'intersection des plans (EMN) et (ABE) ? Tracer cette intersection.

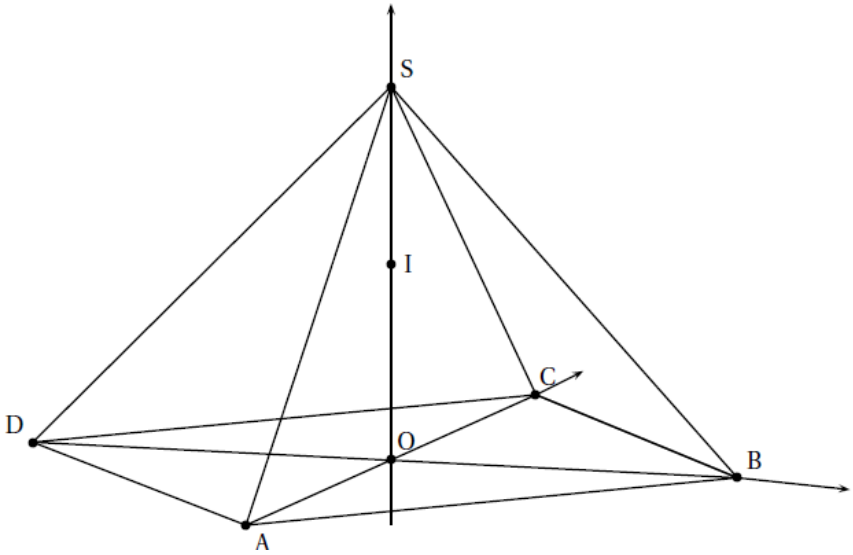
En déduire le tracé de l'intersection d des plans (EMN) et (FDC).



5. AMÉRIQUE DU NORD - JUIN 2016 (NON SPÉCIALITÉ - 5 PTS)

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-contre.

Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.
On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.



1. Justifier que le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OS})$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OS})$

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

a. Déterminer les coordonnées du point K.

b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c. On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d. Déterminer les coordonnées du point L.

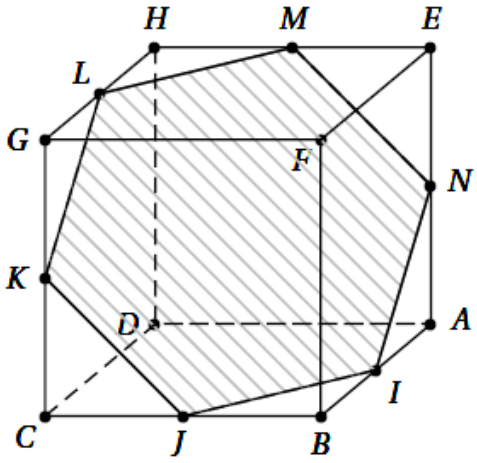
3. On considère le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OS}\right)$

a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

b. Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

c. Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

6. ANTILLES - GUYANE - JUIN 2016 (NON SPÉCIALITÉ - 5 PTS)



$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(D\ ;\ \overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DH}\right)$
Dans ce repère, on a :
$D(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $A(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $H(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $E(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
Soit I le milieu de $[AB]$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I .

On admet que la section du cube par le plan $\mathcal{P}$ représentée ci-contre est un hexagone dont les sommets I , J , K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

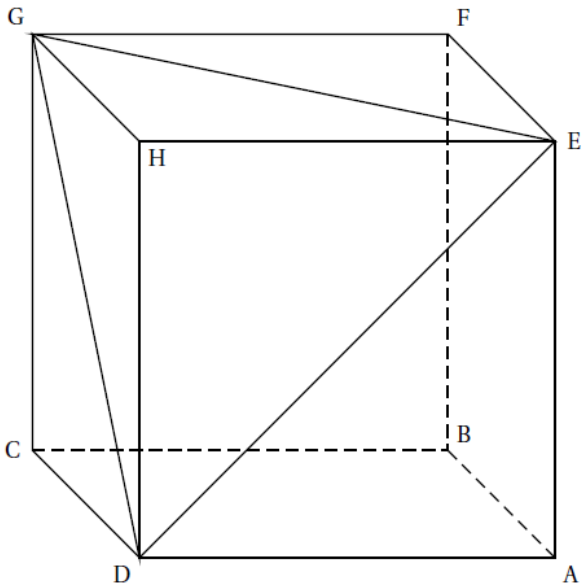
2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathcal{P}$ son sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

7. ANTILLES - GUYANE - SEPT 2016 (COMMUN - 5 PTS)



On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.

On se place dans le repère orthonormé $(B\ ;\ \overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BF})$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).

2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).

4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.

5. Que représente le point P pour le triangle DEG? Justifier la réponse.