Corrections Savoir Fi. 6

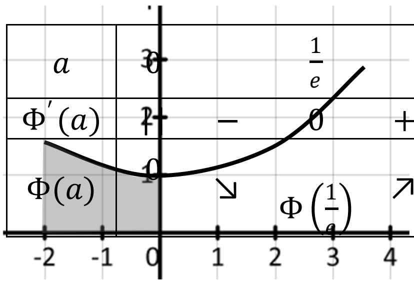
Corrigé Exercice 18

1) a. $\boldsymbol{F(2)=0}$ par définition b. $\boldsymbol{F'(x)=1-x^2}$ car $F(x)=\int_2^x F'(t)dt$

2) a. $\Phi(0)=0$ et $\Phi'(a)=\ln a+1$

b. $\ln a+1\geq 0 \Leftrightarrow \ln a\geq -1 \Leftrightarrow a\geq e^{-1}$

a	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$\Phi'(a)$		$-$	0	$+$	
$\Phi(a)$	0	↘	$\Phi\left(\frac{1}{e}\right)$	↗	



$\mathcal{C}_g$

2) De l'étude graphique de la courbe $\mathcal{C}_g$ on voit que $g(x)>0$. Or $G'=g$ donc si la dérivée de G est positive, la fonction $\boldsymbol{G}$ **est strictement croissante** $\Rightarrow$ On peut **éliminer la courbe 1**
On sait aussi que, comme $G(x)=\int_{-2}^x g(t)dt$, on a $\boldsymbol{G(-2)=0}$ $\Rightarrow$ On peut **éliminer la courbe 3**
Enfin, en regardant l'aire entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$ (aire grisée) on voit que $F(0)=\int_{-2}^0 g(t)dt\geq 2$
$\Rightarrow$ On peut **éliminer la courbe 4**
La seule courbe qui corresponde est la courbe 2

3) On peut établir les tableaux de signe et de variation des fonctions représentées par les 3 courbes, ainsi que le signe de leur dérivée :

x	$-1{,}1$		-1		6
Signe f_1		$+$	0	$-$	

x	$-0{,}5$		0		6
Signe f_2		$-$	0	$+$	

x	$-1{,}1$		0		6
Variation de f_1	$3{,}2$	↘	-4	↗	0^-
Signe f_1'		$-$	0	$+$	

x	$-1{,}1$		1		6
Variation de f_2	$-4{,}5$	↗	$1{,}5$	↘	0^+
Signe f_2'		$+$	0	$-$	

x	0		1		6
Signe f_3		$+$	0	$-$	

x	0		2		6
Variation de f_3	4	↘	$-0{,}5$	↗	0^-
Signe f_3'		$-$	0	$+$	

En comparant les signes, ce qui semble correspondre est $\boldsymbol{f_2=f_1'}$ et $\boldsymbol{f_3=f_2'}$
Comme on sait que sont représentées : f, f' et F (telle que $F'=f$) ;
- **la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_2}$** (fonction f_2) correspond à la **fonction $\boldsymbol{f}$**
- **la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_1}$** (fonction f_1 avec $f_1'=f$ du coup) correspond à la fonction de la **primitive $\boldsymbol{F}$**
- **la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_3}$** (fonction f_3 avec $f_3=f'$ du coup) correspond à la fonction de la **dérivée $\boldsymbol{f'}$**

Corrigé Exercice 19

1) a. Proposition **fausse**, par définition $G(0) = 0$ **b.** Proposition **vraie** : On a $G(x) = \int_0^x G'(t)dt$

c. Proposition **fausse** : Pour tout $x \geq 0$, comme $e^{-t^2} > 0$, on a bien $G(x) > 0$.
Mais si $x \leq 0$ alors $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = -\int_x^0 e^{-t^2}\,dt \leq 0$

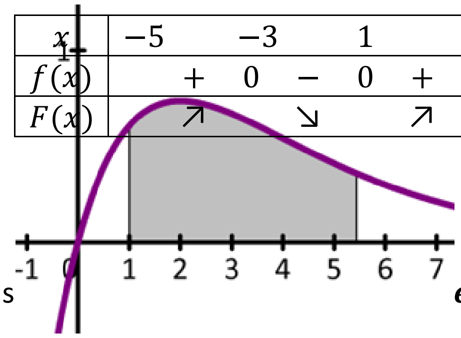
d. Proposition **vraie** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = e^{-x^2} > 0$ donc $G(x)$ est croissante

2) a. Pour $-3 \leq x \leq 0$ on a $f(x) \leq 0$ et donc $\int_x^0 f(t)dt \leq 0$ mais $F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt$ et donc $F(x) \geq 0$

b. Pour $0 \leq x \leq 1$ on a $f(x) \leq 0$ et donc $F(x) = \int_0^x f(t)dt \leq 0$

c. On a $F'(x) = f(x)$ donc :

x	-5		-3		1		2
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	



3) a. $H(x) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_1^x = \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-2}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-2x})}$
On a par composée de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^{y} = 0$ donc, par s $\boldsymbol{e^{-2}}$

b. $I(x) = [-2\ln(1-t)]_x^0 = (-2\ln(1)) - (-2\ln(1-x)) = \mathbf{2\ln(1-x)}$

On a par composée de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\ln(1-x) = \lim\limits_{y\to+\infty} 2\ln y = +\infty$ donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} I(x) = +\infty$

Corrigé Exercice 20

1) a. On a, par définition : $\boldsymbol{F'(x) = xe^{-0,5x}}$
Donc, pour $x \geq 1$, c'est le produit de deux fonctions strictement positives, $\mathcal{C}_f$
et donc la dérivée de F est strictement positive, **la fonction F est strictement croissante sur $[\mathbf{1};\ \mathbf{100}]$** $F(x)$

b. On trouve $F(100) = \int_1^{100} te^{-0,5t}\,dt \simeq 3{,}64$ x
La fonction F est continue, strictement croissantesur $[1; 100]$ et on a
$F(1) = 0$ et $F(100) \simeq 3{,}64$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation **$F(x) = 3$ admet une unique solution.**

(Vous pouvez utiliser le tableur de fonction sur la calculatrice pour trouver une valeur approchée à 6,6)

2) a. D $\mathcal{A} = \int_0^{e-2} \frac{2}{(x+2)}\,dx = [2\ln(x+2)]_0^{e-2} = (2\ln(e-2+2)) - (2\ln 2) = \mathbf{2 - 2\ln 2}$

b. $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{2}{(x+2)}\,dx = [2\ln(x+2)]_0^{\alpha} = 2\ln(\alpha+2) - 2\ln 2 = \mathbf{2\ln\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}$

c. On a $I'(\alpha) = \frac{2}{\alpha+2} > 0$ pour $\alpha \geq 0$ Donc fonction I est strictement croissante sur $[0; e-2]$

d. La fonction I est continue et strictement croissante sur $[0; e-2]$, avec $I(0) = 0$ et $I(e-2) = \mathcal{A}$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une unique solution à l'équation
$I(\alpha) = \frac{\mathcal{A}}{2} = 1 - \ln 2 \simeq 0{,}3069$ à la calculatrice, on trouve $\boldsymbol{\alpha_0 \simeq 0{,}33}$

Corrigé Exercice 21

x	0		1
$x-1$		$-$	0
e^{-x}		$+$	
$(2-x)^2$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	e^{-1}

1) a. $f'(x) = \frac{-e^{-x}(2-x)-(-1)e^{-x}}{(2-x)^2} = \frac{(x-1)e^{-x}}{(2-x)^2}$

b. D'après le tableau de variation, on a bien , pour $x \in [0;1]$,

$$\boldsymbol{\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}}$$

2) a. $G'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = (-ax+a-b)e^{-x}$

Or $G'(x) = (x+2)e^{-x}$ donc on doit avoir $\begin{cases} -a = 1 \\ a-b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$

donc $\boldsymbol{G(x) = (-x-3)e^{-x}}$

On a alors $\boldsymbol{J} = \int_0^1 (x+2)e^{-x}dx = G(1) - G(0) = (-1-3)e^{-1} - (-3)e^0 = \boldsymbol{-\frac{4}{e} + 3}$

b. On a $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{e} \leq x^2 f(x) \leq \frac{x^2}{6}$ et donc $\int_0^1 \frac{x^2}{e}dx \leq K \leq \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx$

Or $\int_0^1 \frac{x^2}{e}dx = \left[\frac{x^3}{3e}\right]_0^1 = \frac{1}{3e}$ et $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$ On a donc bien $\boldsymbol{\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}}$

c. $\boldsymbol{J + K} = \int_0^1 (x+2)e^{-x}dx + \int_0^1 x^2 \frac{e^{-x}}{2-x}dx = \int_0^1 \left(x+2+\frac{x^2}{2-x}\right)e^{-x}dx = \int_0^1 \left(\frac{4-x^2+x^2}{2-x}\right)e^{-x}dx$

$= \int_0^1 \frac{4e^{-x}}{2-x}dx = 4 \times \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2-x}dx = \boldsymbol{4I}$ **CQFD**

d. On a $I = \frac{1}{4}(J+K) \Rightarrow \frac{1}{4}\left(-\frac{4}{e}+3+\frac{1}{3e}\right) \leq I \leq \frac{1}{4}\left(-\frac{4}{e}+3+\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{9e-11}{12e} \leq I \leq \frac{19e-24}{24e}}$

Et en calculant à 0,01 près : $\boldsymbol{0,41 \leq I \leq 0,42}$

Attention : les sujets bac ont souvent une partie calculatoire qu'il faut réussir à traiter !