

Fonctions définies par une intégrale

Théorème : Si f est continue sur $[a; b]$,

la fonction F définie pour $x \in [a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable et $F' = f$

Conséquence : On peut déterminer le sens de variation de Φ grâce au signe de f

Démonstration (ROC) dans le cas où la fonction f est positive et strictement croissante sur $[a; b]$

Soit $x_0 \in [a; b]$ et $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 + \varepsilon \in [a; b]$

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} f(t)dt = F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0)$$

est l'aire de la partie grisée sur le graphique.

Comme f est croissante, cette aire est comprise entre l'aire des rectangles de base $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0 + \varepsilon)$.

Donc on a : $\varepsilon f(x_0) \leq F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0) \leq \varepsilon f(x_0 + \varepsilon)$

Comme $\varepsilon > 0$, on a : $f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0)}{\varepsilon} \leq f(x_0 + \varepsilon)$

Or par continuité : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0)$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\frac{F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0)}{\varepsilon}$

a une limite et que : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0)}{\varepsilon} = f(x_0)$

C'est-à-dire que la fonction F est dérivable sur $[a; b]$ et que $F'(x) = f(x)$

