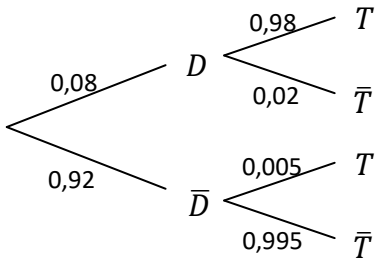
SUJET de BAC BLANC – CORRECTION 2

Exercice 1 — 5 points

Partie A

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.



2. $P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0{,}08 \times 0{,}98 + 0{,}92 \times 0{,}005 = 0{,}083$ CQFD

3. a. On a :

$$P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{0{,}08 \times 0{,}98}{0{,}083} \simeq 0{,}945$$

Si un athlète présente un test positif, il y a donc 94,5% de chances qu'il soit dopé.

b. On a vu que $P_T(D) < 0{,}95$ donc le test proposé ne sera pas commercialisé.

Partie B

1. a. Il s'agit d'une répétition de 5 tirages aléatoires avec la même probabilité 0,103 à chaque tirage d'obtenir un athlète positif, et X est le nombre d'athlètes positifs.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}103$.

b. $E(X) = np = 5 \times 0{,}103 = 0{,}515$

Sur [un grand nombre de contrôles de groupes de] 5 athlètes, il y a en moyenne 0,515 athlète positif.

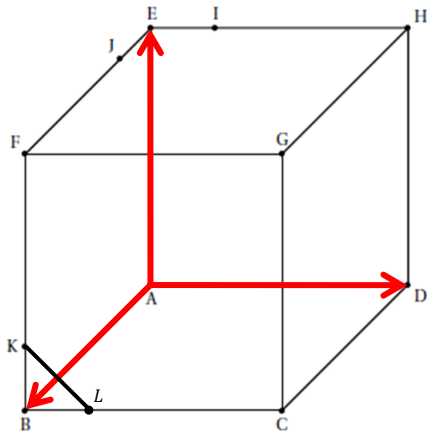
c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}897^5 \simeq 0{,}419$

Il y a donc 41,9% de chances qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés soit positif.

2. On cherche le plus petit n pour que $P(X \geq 1) \geq 0{,}75$. D'après la question précédente, il faut que $n > 5$.
Avec $n = 12$, on trouve $P(X \geq 1) < 0{,}75$ et avec $n = 13$, on trouve $P(X \geq 1) > 0{,}75$.
Il faut donc contrôler au moins 13 athlètes pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 2

5 points



1. $I\left(0;\frac{1}{4};1\right)$ $J\left(\frac{1}{4};0;1\right)$ $K\left(1;0;\frac{1}{4}\right)$

2. On a : $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4};0\right)$ $\overrightarrow{IK}\left(1;-\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right)$ $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$

On calcule : $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+0=0$ $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IK}=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$

$\overrightarrow{AG}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) : il est normal à (IJK).

3. (IJK) a alors une équation de la forme :

$$x+y+z+d=0$$

avec

$$d=-x_I-y_I-z_I=-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}$$

Donc
(IJK) a pour équation :

$$x+y+z-\frac{5}{4}=0$$

et donc aussi (en multipliant tout par 4) :

$$4x+4y+4z-5=0$$

4. On a : $\overrightarrow{BC}(0;1;0)$ et $B(1;0;0)$ donc : $(BC):\begin{cases}x=1\\y=t\\z=0\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

5. $L\in(BC)$ donc il existe t tel que $y_L=t$ et on a forcément $x_L=1$ et $z_L=0$.

$$L\in(IJK)\Rightarrow 4x_L+4y_L+4z_L-5=0\Rightarrow 4+4t+0-5=0\Rightarrow t=\frac{1}{4}$$

On a donc : $L\left(1;\frac{1}{4};0\right)$.

6. Cette intersection est le segment $[KL]$

7. $L\in(IJK)$ donc il suffit de montrer que $M\in(IJK)$ aussi. Or :

$$4x_M+4y_M+4z_M-5=1+4+0-5=0\Rightarrow\ M\in(IJK)$$

Donc les points I, J, L et M (et K) sont coplanaires.

8. a. BD est la diagonale d'un carré de côté 1 donc $BD=\sqrt{2}$. $\overrightarrow{AG}(1;1;1)\Rightarrow AG=\sqrt{3}$ donc[1] $H'G=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. On a $M'\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)\Rightarrow\overrightarrow{EM'}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)\Rightarrow\quad EM'=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire de BDE est donc :

$$a=\frac{1}{2}base\times hauteur=\frac{1}{2}BD\times EM'=\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c. On a donc :

$$V=\frac{1}{3}a\times H'G=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}$$

[1] Il y avait une petite erreur d'énoncé : il y avait déjà un point H sur la figure. Ici, il aurait fallu parler d'un point H' milieu de $[AG]$. Pareil pour le 2e point M… !

Exercice 3 — 5 points

Partie A

1. $A_1 = 620 \times 0{,}9 + 52 = 610$
Il y aura 610 abonnés en 2022 selon ce modèle.

2. Perdre 10%, c'est garder 90%, cela revient donc chaque année à multiplier par 0,9, puis s'ajoutent 52 milliers de nouveaux abonnés. on a donc bien : $A_{n+1} = 0{,}9A_n + 52$.

3. a. On a : $v_{n+1} = A_{n+1} - 520 = 0{,}9A_n + 52 - 520 = 0{,}9A_n - 468$.
Et d'autre part : $0{,}9v_n = 0{,}9(A_n - 520) = 0{,}9A_n - 468$.
Donc $v_{n+1} = 0{,}9v_n$
(v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,9 et de 1er terme $v_0 = A_0 - 520 = 100$

b. On a donc $v_n = 100 \times 0{,}9^n$.

c. Etant donné que $A_n = v_n + 520$, on a bien : $A_n = 100 \times 0{,}9^n + 520$.

4. Puisque $0{,}9 \in [0; 1[$, la suite (v_n) est décroissante et convergente vers 0.
Par limite de somme, (A_n) est donc décroissante et convergente vers 520.
Le journal sera donc un jour en difficulté financière.
(on pouvait aussi remarquer que $A_{16} < 540$ et conclure)

Partie B

1. $B_1 = 620 + 0{,}6(2 \times 0 - 19) = 608{,}6$

2. Initialisation : Pour $n = 0$, on a $B_n = B_0 = 620$ et $0{,}6n(n-20) + 620 = 620$.
Donc l'égalité $B_n = 0{,}6n(n-20) + 620$ est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Si pour $n = p$ cette égalité est vraie, alors :

$$B_p = 0{,}6p(p-20) + 620$$

Alors pour $n = p + 1$, on a :

$$\begin{aligned} B_n = B_{p+1} &= B_p + 0{,}6(2p - 19) \\ &= 0{,}6p(p-20) + 620 + 1{,}2p - 11{,}4 \\ &= 0{,}6p^2 - 12p + 608{,}6 + 1{,}2p \\ &= 0{,}6p^2 - 10{,}8p + 608{,}6 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} &0{,}6n(n-20) + 620 \\ &= 0{,}6n^2 - 12n + 620 \\ &= 0{,}6(p+1)^2 - 12(p+1) + 620 \\ &= 0{,}6(p^2 + 2p + 1) - 12p - 12 + 620 \\ &= 0{,}6p^2 + 1{,}2p + 0{,}6 - 12p + 608 \\ &= 0{,}6p^2 - 10{,}8p + 608{,}6 \end{aligned}$$

Alors $B_n = 0{,}6n(n-20) + 620$ pour $n = p + 1$
Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a bien $B_n = 0{,}6n(n-20) + 620$.

3. A l'aide d'un tableau de valeurs, on constate que la suite (B_n) atteint un minimum de 560 lorsque n est entre 0 et 15. Donc le nombre d'abonnés ne tombera pas sous les 540 milliers d'abonnés dans les 15 prochaines années.

Exercice 4 **5 points**

1.

$$g'(x) = \frac{2e^{2x} \times x - e^{2x} \times 1}{x^2} = \frac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}$$

⇒ **Réponse c**

2.

g' est négative pour $0 < x < \frac{1}{2}$ puis positive donc g est décroissante pour $0 < x < \frac{1}{2}$ puis croissante.

⇒ **Réponse c**

3. On a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^1}{1/2} = 2e$. Le minimum de g est donc $2e$, atteint en $x = \frac{1}{2}$.

⇒ **Réponse b**

4. Pour $2x^2 - 2x + 1$, on a $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ donc g'' est positive sur $]0; +\infty[$.

⇒ **Réponse d**

5. On a :

x	0		2		5		7
$f'(x)$		–	0	+	0	–	

Donc :

⇒ **Réponse b**