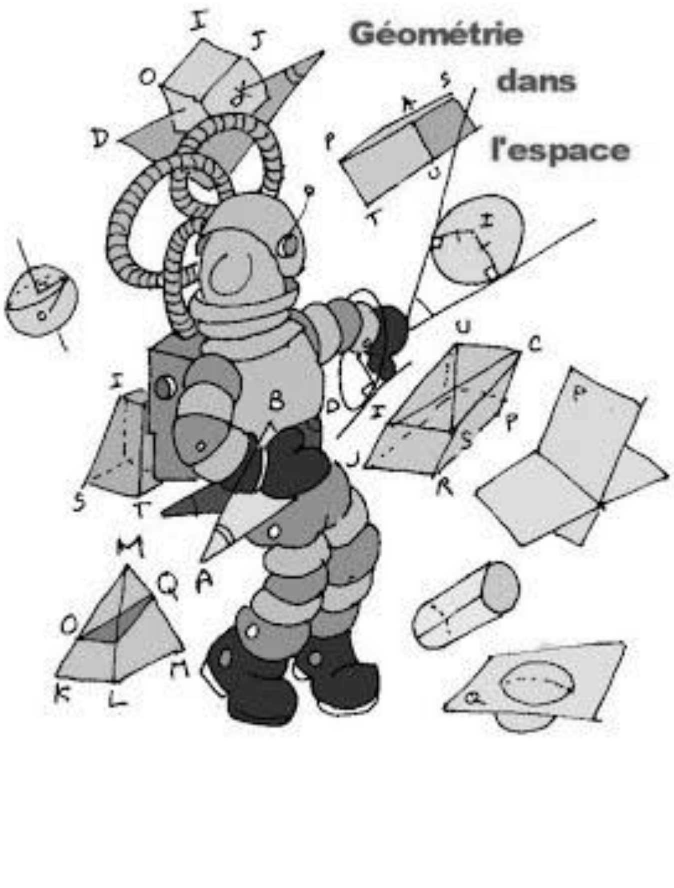
T ALE SPÉ MATHS

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE ÉPISODE 2

CORRECTIONS



1. CORRIGÉ ASIE - JUIN 2021

Partie I

1. On trouve : $P(6;0;0)$ et $Q(0;0;6)$.

2. $\overrightarrow{PQ}(-6;0;6)$ et $\overrightarrow{PR}(2;2;8)$ sont deux vecteurs non colinéaires de (PQR).
On a de plus : $\vec{n}.\overrightarrow{PQ} = -6+0+6=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{PR} = 2-10+8=0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à ces deux vecteurs. $\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan (PQR).

3. Une équation cartésienne de (PQR) est donc de la forme $x-5y+z+d=0$.
Or $P \in (PQR) \Rightarrow d = -x_P + 5y_P - z_P = -6$.
On a donc bien $(PQR) : x-5y+z-6=0$.

Partie II

1. Ω est le milieu des diagonales du cube, et notamment : $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(8;8;8) = (4;4;4)$ donc en effet on a : $\Omega(4\,;\,4\,;\,4)$.

2. d perpendiculaire au plan (PQR) dont un vecteur normal est $\vec{n}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de d.
On trouve donc :

$$d \ : \ \begin{cases} x = 4+t \\ y = 4-5t \\ z = 4+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. L est le point d'intersection de d avec le plan (PQR).
Il existe donc un nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x_L = 4+t \\ y_L = 4-5t \\ z_L = 4+t \end{cases}$.
De plus $L \in (PQR) \Rightarrow \quad x_L - 5y_L + z_L - 6 = 0$.
On obtient donc : $4+t-5(4-5t)+4+t-6=0 \Rightarrow 27t-18=0 \Rightarrow t = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$.
Ainsi : $\begin{cases} x_L = 4+\frac{2}{3} = \frac{14}{3} \\ y_L = 4-\frac{10}{3} = \frac{2}{3} \\ z_L = 4+\frac{2}{3} = \frac{14}{3} \end{cases}$. On a donc bien $L\left(\frac{14}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{14}{3}\right)$.

4. On a $\overrightarrow{\Omega L}\left(\frac{2}{3};-\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right)$.
La distance du point Ω au plan (PQR) est donc égale à :

$$d\big(\Omega,(PQR)\big) = \Omega L = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{100}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{108}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

2. CORRIGÉ MÉTROPOLE - JUIN 2021

1. d passe par O et est dirigée par $\vec{u}$ donc on obtient :

$$d \ : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. **a.** On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} t-1 \\ t-3 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc on a :

$$\begin{aligned} AM^2 &= (t-1)^2 + (t-3)^2 + 4 \\ &= t^2 - 2t + 1 + t^2 - 6t + 9 + 4 \\ &= 2t^2 - 8t + 14 \qquad \text{CQFD} \end{aligned}$$

b. Pour $t = 2$, la représentation paramétrique de d donne le point M_0 donc $M_0 \in d$.
Soit $D(t) = 2t^2 - 8t + 14$. Il s'agit de déterminer si la fonction D admet un minimum en $t = 2$.
1re méthode : D est polynôme du 2d degré convexe ($a = 2 > 0$) dont le sommet de la parabole se situe en $t_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$. Donc D possède un minimum en $t = 2$.
2e méthode : On a $D^{'}(t) = 4t - 8$ qui s'annule en $t = 2$, est négative pour $t < 2$ et positive pour $t > 2$. Donc D possède un minimum en $t = 2$.
La quantité $AM^2 = D(t)$ est donc minimale pour $t = 2$, donc AM est aussi minimale pour $t = 2$, c'est-à-dire lorsque M se trouve en M_0.

3. On a $\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ainsi $\vec{u}.\overrightarrow{AM_0} = 1 - 1 + 0 = 0$ donc (AM_0) et d sont orthogonales.
(Puisque $M_0 \in d$, (AM_0) et d sont même plus précisément perpendiculaires)

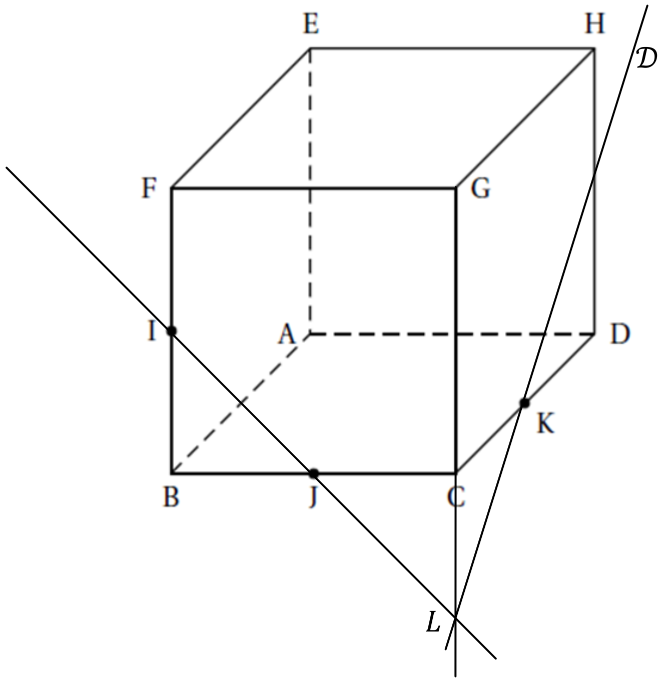
4. **a.** Soit M un point quelconque du plan $(AA^{'}M_0)$. Montrons que M est forcément plus loin de O que M_0, c'est-à-dire que $OM \geq OM_0$.
Puisque $(AA^{'}M_0)$ est perpendiculaire à (OM_0) en M_0, le triangle MM_0O est rectangle en M_0. OM étant la longueur de son hypoténuse, c'est-à-dire le plus grand de ses 3 côtés, on a donc $OM \geq OM_0$.
M_0 est donc le point du plan $(AA^{'}M_0)$ le plus proche du point O.

b. La pyramide $OM_0A'A$ a pour hauteur $h = AA^{'}$ et pour base correspondante le triangle rectangle $OM_0A^{'}$.
Or $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $h = 2$. $\overrightarrow{OM_0}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $OM_0 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. $\overrightarrow{M_0A'}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $M_0A^{'} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.
On a donc $\mathcal{B} = \frac{1}{2}OM_0 \times M_0A^{'} = \frac{1}{2}2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.
Le volume de la pyramide $OM_0A'A$ est donc donné par :

$$V = \frac{1}{3}2 \times 2 = \frac{4}{3}$$

3. CORRIGÉ PONDICHERY - JUIN 2016

Partie A (ci-contre)
Les points K et L sont à la fois dans le plan (CDH) et dans le plan (IJK) donc $\mathcal{D} = (KL)$.



Partie B

1. $A(0;0;0)$; $G(1;1;1)$; $I\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$; $J\left(1;\frac{1}{2};0\right)$ et $K\left(\frac{1}{2};1;0\right)$

2. a. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont non colinéaires (les points I, J et K forment un plan).

On a : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $et\ \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Or $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IJ} = 1\times 0 + 1\times\frac{1}{2} + 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Et $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IJ} = 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\times 1 + 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (IJK), **il est donc normal au plan (IJK)**

b. Le plan (IJK) a donc une équation du type $x + y + z + d = 0$

Comme $I \in (IJK)$, on a $1 + 0 + \frac{1}{2} + d = 0 \iff d = -\frac{3}{2}$

Une équation cartésienne du plan (IJK) est $\boldsymbol{x + y + z - \frac{3}{2} = 0}$

3. a. On a $M(t;t;t)$ donc $MI^2 = (x_I - x_M)^2 + (y_I - y_M)^2 + (z_I - z_M)^2 = (1-t)^2 + (-t)^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2$

$$= 1 - 2t + t^2 + t^2 + \frac{1}{4} - t + t^2 = \boldsymbol{3t^2 - 3t + \frac{5}{4}}$$

b. Soit f la fonction du 2nd degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$

Son minimum est atteint pour $t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Pour cette valeur de t, on a le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Donc dans le repère d'origine A, on a bien les coordonnées du point N $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Pour **ce point N, la valeur de MI^2 est minimale et donc celle de MI aussi** (puisque la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$)

4. a. Le plan (IJK) a pour équation $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$

Or pour le point N, on a : $x + y + z - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$ Donc N appartient bien au plan (IJK).

b. $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 0$ Les droites (IN) et (AG) sont orthogonales et comme N appartient à la droite (AG), les deux droites sont donc coplanaires et donc perpendiculaires.

De même, comme $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$, on a : $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$ Les droites (IN) et (BF) sont orthogonales et comme I appartient à la droite (BF), les deux droites sont donc coplanaires et donc perpendiculaires.

La droite (IN) est bien perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

4. CORRIGÉ LIBAN - MAI 2016

1. a. $ABCD$ est un carré de centre I et de côté 1. Donc I est le milieu de la diagonale $[AC]$ qui mesure $\sqrt{2}$ (par Pythagore, $\sqrt{1^2+1^2}$). Donc $AI = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D'autre part, les deux pyramides sont régulières et identiques, donc (EF) est orthogonale au plan $(ABCD)$

Donc le triangle AEI est rectangle en I, et, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$EI^2 = AE^2 - AI^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Et donc on a bien : $EI = \sqrt{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc : $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2};0\right)$,

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$ donc $E\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et par raison de symétrie $F\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b. $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$ Donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}.\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = 0 - \frac{2}{2} + \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 0 - 1 + 1 = 0$ Donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires et sont tous deux orthogonaux à $\vec{n}$, **donc $\vec{n}$ est bien normal au plan (ABE).**

c. D'après la question précédente, le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE) qui a donc une équation cartésienne du type $-2y + z\sqrt{2} + d = 0$ et comme $A \in (ABE)$, on a $d = 0$

Le plan (ABE) a donc pour équation cartésienne $\boldsymbol{-2y + z\sqrt{2} = 0}$

2. a. Déjà les droites (AB) et (CD) sont parallèles. De plus : $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FC} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \overrightarrow{AE}$

Donc les droites (FC) et (AE) sont parallèles. Les plans (ABE) et (FDC) possèdent deux couples de droites parallèles entres elles deux à deux, **ils sont donc parallèles entre eux**

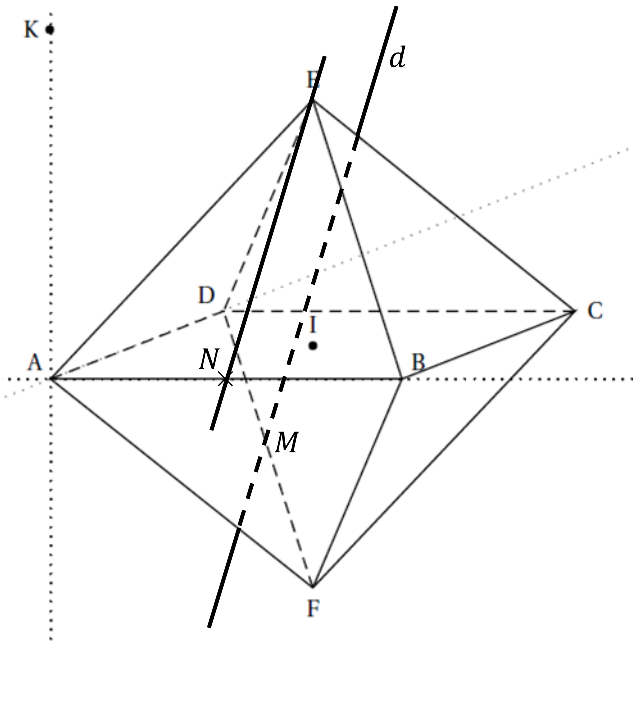
*(**Remarque** : on peut aussi simplement montrer que $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal au plan (FDC), en calculant son produit scalaire avec $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{FC}$ par exemple)*

b. L'intersection de (EMN) avec (ABE) est la droite (EN), puisqu'elle appartient aux deux plans.

Comme (ABE) et (FDC) sont parallèles, l'intersection du plan (EMN) avec le plan (FDC) est parallèle à (EN).

Or le point M appartient aux deux plans (EMN) et (FDC), donc appartient à leur intersection.

En conséquence, l'intersection du plan (EMN) avec (FDC) est la droite passant par M et parallèle à (EN)



5. CORRIGÉ AMÉRIQUE DU NORD - JUIN 2016

1. O est le centre du carré dont les diagonales sont de même longueur et perpendiculaires :
donc $OB = OC = 1$ et $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux.
De plus, la pyramide est régulière, donc $(OS) \perp (ABC)$. Donc $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OS}$ sont orthogonaux.
De plus, toutes les arêtes ont la même longueur, donc $AB = SB$ or, comme le triangle OAB est rectangle, on a $AB^2 = OB^2 + OA^2 = 1 + 1 = 2$ donc $AB = \sqrt{2}$.
Dans le triangle SOB, rectangle en O, on a $OS^2 = SB^2 - OB^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$
On a $OA = OB = OS = 1$
Le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OS})$ est bien un repère orthonormé.

2. a. $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SK} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD}\right) = \overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$
Donc le point K a pour coordonnées : $\boldsymbol{K\left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)}$.

b. On a $\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-1 \\ 0-0 \\ \frac{2}{3}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ avec $\frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$
On a $\boldsymbol{\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}}$ les vecteurs sont colinéaires, donc **les points B, I et K sont alignés.**

c. Le point K appartient au plan (BCI) puisque $K \in (BI)$ d'après la question précédente.
Le point K appartient aussi par définition au plan (SAD) : il appartient donc à l'intersection des plans (BCI) et (SAD). Il en est de même pour le point L.
Donc l'intersection des plans (BCI) et (SAD) est la droite (KL).
Or les droites (AD) et (BC) sont parallèles, donc, d'après le théorème du toit, l'intersection (KL) leur est parallèle : on a bien **(AD) et (KL) parallèles**

d. Les droites (AD) et (LK) étant parallèles, on a, d'après le théorème de Thalès : $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$
Et donc $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SJ} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$
Donc le point L a pour coordonnées : $\boldsymbol{L\left(0; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)}$.

3. a. On a $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 1 + 0 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}.\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -1 + 0 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCI), **il est donc normal au plan (BCI)**

b. On a $S(0; 0; 1)$; $A(0; -1; 0)$ et $D(-1; 0; 0)$ donc $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
On remarque que $\vec{n} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{DS}$ **les 3 vecteurs sont donc coplanaires.**

c. $\vec{n}$ est normal au plan (BCI) et coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires de (SAD) : **les plans (BCI) et (SAD) sont donc orthogonaux.**

6. CORRIGÉ ANTILLES - GUYANE - JUIN 2016

1. a. On a $B(1;1;0)$; $F(1;1;1)$ et $G(1;0;1)$ donc $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}1-1\\0-1\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0 - 1 + 1 = 0$ donc $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BG}$

et $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$ donc $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BEG), **il est donc normal à ce plan.**

b. Le plan $\mathcal{P}$ a une équation du type $x + y + z + d = 0$

et comme $I \in \mathcal{P}$, on a $x_I + y_I + z_I + d = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{3}{2}$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $\boldsymbol{x + y + z - \frac{3}{2} = 0}$

2. Le milieu de $[AE]$ a pour coordonnées $\left(\frac{0+0}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right)$ soit $\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$

On a $N \in \mathcal{P}$ et $N \in [AE]$

Or $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ donc la droite (AE) passant par $A(0;1;0)$ a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Les coordonnées de N vérifient aussi l'équation de $\mathcal{P}$ donc $0 + 1 + t - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Le point N a donc pour coordonnées $\boldsymbol{N\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)}$ **c'est donc bien le milieu du segment $[AE]$**

<u>Remarque</u> : on peut aussi passer par une démonstration sans calcul, vu que les plans $\mathcal{P}$ et (BGE) sont parallèles, donc que leurs intersections avec la face ABEF sont parallèles, d'où $(BE)//(IN)$. Comme I est le milieu de [AB], par la réciproque du théorème de la droite des milieux, N est bien le milieu de [AE].

3. a. Or $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

donc la droite (HB) passant par $H(0;0;1)$ a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Remarque : si vous choisissez le point B, cela vous donne $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 + t' \\ z = -t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$

b. On résout $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ x + y + z - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ t + t + 1 - t - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc le plan et la droite sont sécants et on a $\boldsymbol{T\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)}$

4. Une base du tétraèdre est le triangle EFB, rectangle en F, son aire est donc $\mathcal{A}(EFB) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

La hauteur correspondante dans le tétraèdre est le côté $[FG]$, donc le volume est $\mathcal{V}(FEGB) = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

7. CORRIGÉ ANTILLES - GUYANE - SEPT 2016

1. On a $H(1;1;1)$ donc $\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc la droite (BH) passant par B a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = t\,, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

2. On a $D(1;1;0)$; $E(1;0;1)$ et $G(0;1;1)$ donc $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{DE} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$ donc $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{DG} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$ donc $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DG}$

Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (DEG), **il est donc normal à ce plan, et (BH) est perpendiculaire au plan $(\boldsymbol{DEG})$**

3. Le plan (DEG) a une équation cartésienne du type $x + y + z + d = 0$ et comme, par exemple, il passe par le point D, on a $x_D + y_D + z_D + d = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$

On a donc une équation cartésienne du plan (DEG) : $\boldsymbol{x + y + z - 2 = 0}$

4. On résout $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ t + t + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$ donc on a $\boldsymbol{P\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)}$

5. On a $PG = \sqrt{\left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ On montre de même que $PE = PD = PG = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Le point P est donc équidistant aux trois sommets du triangle DEG, c'est donc **le centre du cercle circonscrit au triangle $\boldsymbol{DEG}$.**

Mais comme le triangle est équilatéral, il s'agit aussi de son **centre de gravité et de son orthocentre.**