Savoir Fi. 4: Valeur moyenne d'une fonction

Exercice 14 : Calcul de valeur moyenne

1) a. Soit f définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \frac{1}{2x+1}$. Calculer la valeur moyenne de f sur [0 ; 2].

On donnera la valeur exacte simplifiée puis une valeur approchée à 0,1 près

b. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$. Calculer la valeur moyenne de h sur [−1 ; 1].

2) On donne une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x$

a. Montrer que g a pour primitive la fonction G définie par : $G(x) = (x-1)e^x$

b. Calculer la valeur moyenne de g sur [−1 ; 2].

3) a. Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0; \pi]$

b. Soit g la fonction définie sur $[4; 10]$ par $g(t) = \frac{5}{t^2}$. Calculer la valeur moyenne de g sur $[4; 10]$.

c. Calculer la valeur moyenne de l'exponentielle sur l'intervalle $[0; 5]$.
En donner une valeur approchée au centième.

Exercice 15 : Calcul de valeur moyenne et contextualisation

1) Une étude a permis de montrer qu'une population d'insectes en contact avec un insecticide α diminue très rapidement lors des quatre premières journées. La population peut être modélisée par la fonction h définie sur l'intervalle [0 ; 4] par :

$$h(t) = 50e^{-0,5t}$$

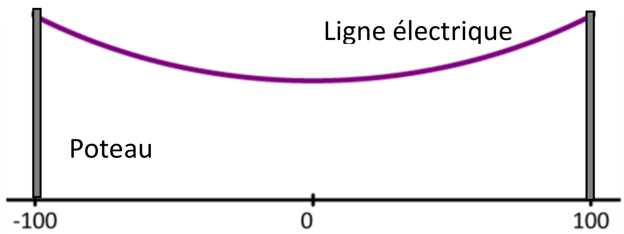
où t est le temps exprimé en jour et $h(t)$ le nombre de milliers d'insectes.

Quelle est la population moyenne d'insectes entre le début de la deuxième et le début de la quatrième journée ? *Arrondir à l'unité*

2) La hauteur d'une ligne électrique longue de 200 m peut être modélisée, comme sur le schéma ci-contre, par la fonction h définie sur l'intervalle $[-100; 100]$ par :

$$h(x) = 15\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{\frac{-x}{100}}\right)$$

Déterminer la hauteur moyenne de la ligne électrique.



3) On injecte dans le sang un médicament. Soit t le temps écoulé (en heures) depuis l'injection du produit. La concentration du médicament en grammes par litre de sang est donnée sur $[0; +\infty[$ par : $f(t) = 5te^{-t}$

a. Vérifier que la fonction $F(t) = -5e^{-t} - f(t)$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$

b. Calculer la concentration moyenne pendant la première heure à 0,01 près, puis la concentration moyenne pendant les 2 premières heures.

Plus loin...

5) La croissance du nombre de personnes touchées par une épidémie au cours du temps est modélisée par la fonction : $g(x) = 20 + 3e^{0,3x}$, où x est le temps mesuré en mois.

Quel a été le nombre moyen de malades touchés par l'épidémie pendant les 4 premiers mois ?

6)/5) Si f représente un signal périodique, la valeur efficace f_{eff} de f est par définition la racine carrée de la moyenne sur une période de f^2. On dit que la valeur efficace est la moyenne quadratique de f.

a. Traduire par une formule la phrase définissant le calcul de f_{eff}.

b. Soit un signal représenté par la fonction $f(t) = 5\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$. Montrer que la fonction f est 2π-périodique.

c. On rappelle que : $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$. Montrer que la valeur efficace de ce signal est $f_{eff} = \frac{5}{\sqrt{2}}$