

SUJET de BAC BLANC

MATHEMATIQUES

SPECIALITE MATHEMATIQUES

Épreuve du 31 janvier 2022

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 5 pages.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

L'usage du téléphone portable est interdit quelle qu'en soit la raison

Aucun échange de calculatrice n'est permis entre les candidats, ni d'aucun document ou brouillon.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

5 points

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} .

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17% de la population française.

Parmi ces utilisateurs réguliers, 32% sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

(Source : TNS Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

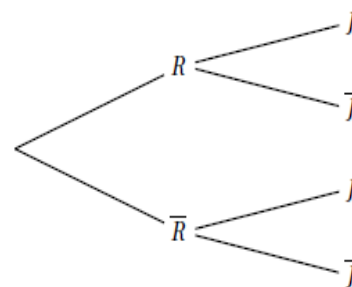
1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.

2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11% de la population française.

Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $0,056$ à 10^{-3} près.

4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun, à 10^{-3} près.



Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.

La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.

2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.

3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95% de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.

Cette affirmation est-elle vraie? Justifier votre réponse.

4. Combien de personnes faut-il interroger au maximum pour qu'il y ait plus de 95% de chance d'en obtenir moins de 13 qui utilisent régulièrement les transports en commun ?

5. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées?

Exercice 2

5 points

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2 ; -1 ; 0), B(3 ; -1 ; 2), C(0 ; 4 ; 1) \text{ et } S(0 ; 1 ; 4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
2.
 - a. Montrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; 1 ; -1)$ est orthogonal au plan (ABC) .
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S . Elle coupe le plan (ABC) en H .
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) .
 - b. Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2; 2; 3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est : $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$
Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
5.
 - a. Calculer la longueur SA .
 - b. On indique que $SB = \sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

Exercice 3

5 points

Les parties A et B sont indépendantes

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. Elle souhaite modéliser l'évolution de son nombre d'abonnés.

Partie A

Dans cette partie, on modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10% de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note a_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $a_0 = 1\,000$.

1. Calculer a_1 . Interpréter dans le contexte.
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,9a_n + 250$.
3. En quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200 ? Justifier.
4. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = a_n - 2500$ pour tout entier naturel n .
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $u_0 = -1500$.
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n et montrer que : $a_n = -1500 \times 0,9^n + 2500$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on modélise le nombre d'abonnés de la façon suivante :

- pour tout entier naturel n , on note b_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$
- $b_0 = 1\,000$
- pour tout entier naturel n , on a $b_{n+1} = b_n - 10(2n - 19)$

1. Calculer b_1 .
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $b_n = -10n^2 + 200n + 1000$
3. Selon ce modèle, le nombre d'abonnés pourra-t-il dépasser les 2200 dans les 20 prochaines années ? Expliquer rapidement votre démarche.

Exercice 4

5 points

Pour chaque question, quatre affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.

Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci. AUCUNE JUSTIFICATION n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$$

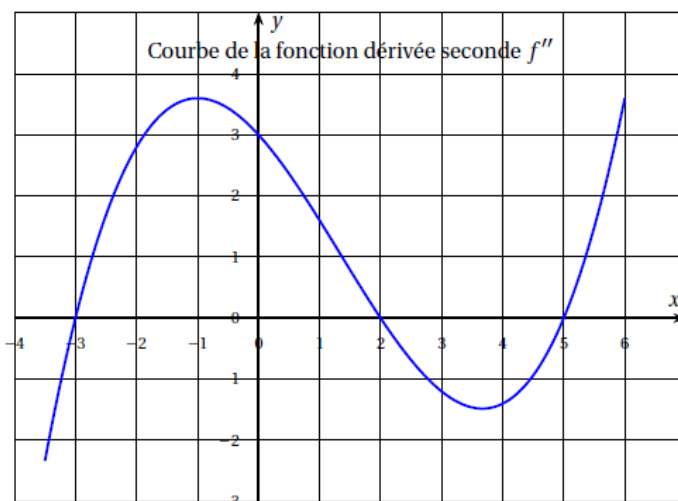
- a. La dérivée de h est la fonction définie par $h'(x) = (2x - 2)e^x$.
- b. La fonction h est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$.
- c. La dérivée seconde de h est la fonction définie par $h''(x) = (x + 3)(x - 1)e^x$.
- d. La fonction h est concave sur $[0 ; +\infty[$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x}{e^x}$.

- a. L'équation $g(x) = e^{-1}$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
- b. L'équation $g(x) = e^{-1}$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.
- c. L'équation $g(x) = e^{-1}$ a une solution et une seule solution sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.
- d. L'équation $g(x) = e^{-1}$ a pour ensemble de solutions $S = \{1\}$.

3. On donne ci-contre la courbe $\mathcal{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3,5 ; 6]$.

- a. La fonction f admet trois points d'inflexion.
- b. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.
- c. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
- d. La fonction f n'admet qu'un seul point d'inflexion.



4. On considère la fonction z définie sur $\left[\frac{1}{5}; 1\right]$ dont la dérivée est $z'(x) = e^x + \ln x$.

Sur son ensemble de définition, la fonction z est :

- a. Décroissante puis croissante
- b. Décroissante
- c. Croissante
- d. Croissante puis décroissante

5. On considère la fonction a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$a(x) = 2 - x^2 \ln x$$

On note a' la dérivée de la fonction a .

Quel que soit le réel x , $a'(x)$ est égal à :

- a. $\frac{2}{x} - x - 2x \ln x$
- b. $-x(1 + 2 \ln x)$
- c. $-2x \ln x$
- d. -2