Savoir Fc.3 - Applications du TVI

Entraînement 1

1) Montrer que l'équation $x^3(x-1) = 2$ admet une unique solution positive.

2) On considère la fonction g définie sur $[-2; 3]$, par : $g(x) = \sqrt{x^2+1} - 3$.
On donne le tableau de variation :

x	-2		0		3
$g(x)$	$\sqrt{5}-3$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\sqrt{10}-3$

Déterminer le tableau de signe de g sur$[-2; 3]$, en précisant et en justifiant les notations utilisées

Entraînement 2

1) On considère la fonction g définie sur $[-4; 3]$ par : $g(x) = x^3 + 6x^2 + 7x - 4$.
On donne le tableau de variation de la dérivée g' de la fonction g

x	-4		-2		3
$g'(x)$	7	$\searrow$	-5	$\nearrow$	70

Déterminer le tableau de signe de g' puis le tableau de variation de g sur $[-4; 3]$, en précisant les notations utilisées

2) L'équation $x^3 = 6x - 3$ admet-elle des solutions négatives ? Justifier.
Si oui, donnez-en une valeur approchée à 10^{-1} près.

Entraînement 3

1) Montrer qu'il existe une valeur de x appartenant à l'intervalle $[0; 10]$ pour laquelle $x^5 = 1000$.
Donnez-en une valeur approchée au centième près.

2) On considère la fonction g définie par : $g(x) = -x^3 - 6x^2 + 36x + 20$
On donne le tableau de variation de la dérivée g' de la fonction g

x	-10		-2		8
$g'(x)$	-144	$\nearrow$	48	$\searrow$	-252

Déterminer le tableau de signe de g' puis le tableau de variation de g sur $[-10 ; 8]$, en précisant les notations utilisées

Entraînement 4

1) Soit la fonction g définie sur $[-2; 2]$ par : $g(x) = \frac{15-x^3}{x^2+3} - 4$.
On admet que la fonction g est croissante sur $[-2; 0]$ et décroissante sur $[0; 2]$

Déterminer le tableau de signe de g sur [-2 ; 2], en précisant les notations utilisées et en rédigeant les étapes essentielles.

2) Existe-t-il un ou plusieurs nombres x tels que $x = 1 + 4\sqrt{x}$? Justifier

Entraînement 5

1) Existe-t-il un nombre $x \leq -1$ tel que $x^3 = x^2 - 1$. Justifier.

2) On considère la fonction g définie sur $[-2; 1]$ par : $g(x) = \frac{4x}{x^2+2}$
On donne le tableau de variation de la dérivée g' de la fonction g

x	-2		0		1
$g'(x)$	$-\frac{2}{9}$	↗	2	↘	$\frac{4}{9}$

Déterminer le tableau de signe de g' puis le tableau de variation de g sur [−2 ; 1], en précisant les notations utilisées et en rédigeant sommairement les étapes essentielles.

(Attention, le but n'est pas de déterminer l'expression de g' !)

Corrections Savoir Fc.3

Corrigé Entraînement 1

1) Soit f définie par $(x) = x^3(x-1) - 2 = x^4 - x^3 - 2$. On a $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$.
On a alors

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		2	$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	$\vert$	$+$		
$4x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-\frac{539}{16}$	$\nearrow$	6	$\nearrow$

$f(x) < 0$ sur $\left[0; \frac{3}{4}\right]$ et $f(x) \geq 6$ sur $[2; +\infty[$ donc l'équation n'a pas de solution sur ces intervalles.
Sur $\left[\frac{3}{4}; 2\right]$, f est continue et strictement croissante $f\left(\frac{3}{4}\right) < 0 < f(2)$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $[0; 2]$.Comme, par ailleurs, pour $x \geq 2$, on a $f(x) > 0$, il n'y a pas d'autre solution.
L'équation $x^3(x-1) = 2$ admet bien une unique solution positive.

2) On a $g(-2) \simeq -0{,}8$ et $g(3) \simeq 0{,}2$
La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0; 3]$, avec $0 \in [g(0); g(3)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution sur $[0; 3]$ qu'on note α (par exemple).
Par ailleurs, sur $[-2; 3]$, on a $g(x) < 0$, il n'y a donc pas d'autre solutions.
On a donc :

x	-2		α		3
$g(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Corrigé Entraînement 2

1) La fonction g' est continue et strictement monotone sur $[-4; -2]$ et sur $[-2; 3]$. On a $g'(-4) > 0$; $g'(-2) < 0$ et $g'(3) > 0$. D'après le TVi, l'équation $g'(x) = 0$ admet uniquement 2 solutions, l'une, α, sur $[-4; -2]$ et l'autre, β, sur $[-2; 3]$
On a :

x	-4		**α**		**β**		3
$g'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$g(\beta)$	$\nearrow$	98

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = x^3 - 6x + 3$. On a $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$
On a alors :

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-6	$\nearrow$	$\simeq 8{,}7$	$\searrow$	3	$\searrow$	$\simeq -2{,}7$	$\nearrow$	

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-3; -\sqrt{2}]$, avec $0 \in [f(-3); f(-\sqrt{2})]$ par exemple.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $[-3; -\sqrt{2}]$.Comme par ailleurs, pour $x < -3$, on a $f(x) < 0$, et pour $x \in [-\sqrt{2}; 0]$, on a $f(x) > 0$, il n'y a pas d'autre solution.
L'équation $x^3 = 6x - 3$ admet donc une unique solution négative. On a $\boldsymbol{\alpha \simeq -2{,}7}$

Corrigé Entraînement 3

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 1000$

On a $f'(x) = 5x^4 \geq 0$ la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

En particulier, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; 10]$, avec $f(0) = -1000 < 0$ et $f(10) = 99000 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $[0; 10]$.

L'équation $x^5 = 1000$ admet donc une unique solution sur $[0; 10]$. On a $\boldsymbol{\alpha \simeq 3,98}$

2) g' est continue et strictement monotone sur $[-10; -2]$ et sur $[-2; 8]$.

On a $0 \in [g'(-10); g'(-2)]$ et $0 \in [g'(8); g'(-2)]$.

D'après le TVI, $g'(x) = 0$ admet uniquement deux solutions $\alpha \in [-10; -2]$ et $\beta \in [-2; 8]$.

On a

x	-10		$\boldsymbol{\alpha}$		$\boldsymbol{\beta}$		8
$g'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$g(x)$	60	↘	$g(\alpha)$	↗	$g(\beta)$	↘	-588

Il n'est pas obligatoire, vu la formulation de la question, de trouver les valeurs de α et de β

Corrigé Entraînement 4

1) On a

x	-2		0		2
$g(x)$	$-\frac{5}{7}$	↗	1	↘	-3

g est continue sur $[-2; 2]$, strictement croissante sur $[-2; 0]$ et décroissante sur $[0; 2]$, avec $f(-2) < 0$; $f(0) > 0$ et $f(2) < 0$. D'après le Tvi, l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : $\alpha \in [-2; 0]$ et $\beta \in [0; 2]$

On a alors

x	-2		$\boldsymbol{\alpha}$		$\boldsymbol{\beta}$		2
$g(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 - 4\sqrt{x}$

On a $f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ on cherche à résoudre $1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 4$

On a alors

x	0		4		25		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		
$f(x)$	-2	↘	-5	↗	$\mathbf{3}$	↗	

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[4; 25]$, avec $0 \in [f(4); f(25)]$ par exemple.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $[4; 25]$. Comme par ailleurs, pour $x \in [0; 4]$, on a $f(x) < 0$, et pour $x > 25$, on a $f(x) > 0$, il n'y a pas d'autre solution.

L'équation $x = 1 + 4\sqrt{x}$ admet donc une unique solution.

Corrigé Entraînement 5

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = x^3 - x^2 + 1$. On a $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$

On a alors

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\mathbf{3}$	$\nearrow$	

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -1]$, mais $f(x) \leq -1 < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution pour $x \leq -1$

Il n'existe pas de nombre $x \leq -1$ tel que $x^3 = x^2 - 1$.

2) g' est continue et strictement décroissante sur $[-2; 0]$, et g' change de signe sur $[-2; 0]$

D'après le TVI, il existe un unique $\alpha \in [-2; 0]$ tel que $g'(x) = 0$

x	-2		$\boldsymbol{\alpha}$		1
$g'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$g(x)$	$-\frac{4}{3}$	$\searrow$	$\frac{4\alpha}{\alpha^2+2}$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$