Tle - Spé Maths

FONCTIONS & DÉRIVÉES

Entraînements

Savoirs Fd

Savoirs

Fd. 1 : Fonction exponentielle (généralités et signes)

Fd. 2 : Fonction logarithme népérien (généralités et signes)

Fd. 3 : Calcul de dérivée (fonctions de référence, multiples, sommes)

Fd. 4 : Calcul de dérivée (composées)

Fd. 5 : Calcul de dérivée (produits et quotients)

Fd. 6 : Dérivées et sens de variation d'une fonction (tableau de variation, extrema, inégalités et encadrements)

Fd. 7 : Tangentes (détermination graphique, équations de tangente)

Savoir Fd. 1 : Exponentielle

Entraînement 1

1) On donne la fonction définie par $f(x) = (3-2x)e^x - e^{x^2-1}$.

Calculer $f(1)$: en donner la valeur exacte le plus simplifiée possible, puis une valeur approchée au centième.

2) On donne les fonctions $g(x) = -2e^{1-3x}$ et $h(x) = (1-x^2)e^x$.
Déterminer le tableau de signe de g sur $\mathbb{R}$ et celui de h sur $[0; +\infty[$.

Entraînement 2

1) Simplifier au maximum le nombre : $A = \dfrac{2e^{5-2^2} - e^{(1-2)^2}}{e^{1-(3-2)}}$, puis en donner une valeur approchée au centième.

2) On donne les fonctions $f(x) = (2x-6)e^{-x}$ et $g(x) = e^x + 2$
Déterminer le tableau de signe de f sur $[1; +\infty[$et celui de g sur $\mathbb{R}$

Entraînement 3

1) Soit $A = \dfrac{3e^{2\times3-6}+1}{e^{1-2}}$. Donner la valeur exacte réduite, puis une valeur approchée à 0,1 près.

2) On donne les fonctions $h(x) = 2e^x - 2$ et $k(x) = \dfrac{e^{1-x}}{x^2-3x+2}$.
Déterminer le tableau de signe de h sur $\mathbb{R}$et celui de k sur son domaine de définition.

Entraînement 4

1) On donne la fonction $f(x) = \dfrac{e^{2x+4}}{e^{x+1} + e^{x+2}}$.

Déterminer la valeur exacte de l'image de −2 par f (la plus simplifiée possible) puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

2) On donne les fonctions $g(x) = 2x^2e^x + 1$ et $h(x) = xe^{-x}$.
Déterminer le tableau de signe de g sur $\mathbb{R}$ et celui de h sur $[-2; 3]$.

Savoir Fd. 2 : Logarithme népérien

Entraînement 1

1) On donne les fonctions définies par $f(x) = 3x - 1 + 2\ln(x^2-3)$ et $g(x) = (x+e)\left(\ln(x) + \ln\left(\frac{e}{x}\right)\right)$

Calculer $f(2)$ et $g(e)$ et simplifier au maximum.

2) Soit la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = (2x-6)\ln(x)$.
Déterminer le tableau de signe de h sur son ensemble de définition.

Entraînement 2

1) On donne les fonctions définies par $l(x) = 4\ln(3x) - \ln(4-x)$ et $m(x) = \ln\left(\frac{2}{x}\right) - 3\ln(2x)$

Calculer $l(1)$ et $m\left(\frac{1}{2e}\right)$ et simplifier au maximum.

2) Soit la fonction p définie sur $]0;+\infty[$ par $p(x) = -3x(1-\ln(x))$.
Déterminer le tableau de signe de p sur son ensemble de définition.

Entraînement 3

1) On donne la fonction h définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = (2-x)\ln(x+1) + 1$.

Calculer $h(0)$ et $h\left(\frac{1}{e} - 1\right)$ et simplifier au maximum.

2) Soit la fonction i définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par $i(x) = \frac{\ln(x)}{1-x}$.
Déterminer le tableau de signe de i sur son ensemble de définition.

Entraînement 4

1) On donne la fonction φ définie sur $]-1;+\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\ln(2-x)}{1+x^2}$.

Calculer$\varphi(1)$ et $\varphi\left(2 - \frac{1}{e}\right)$ et simplifier au maximum.

2) Soit la fonction w définie sur $]0;4[$ par $w(x) = (2x-8)\ln(x)$.
Déterminer le tableau de signe de w sur son ensemble de définition.

Savoir Fd. 3 : Calcul de dérivée

(Multiples et sommes)

Dériver les fonctions suivantes.

Entraînement 1

$f(x) = 3 - x + 2x^7$ $\quad$ $g(x) = 2\ln(x) - \frac{1}{x}$ $\quad$ $h(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{6}{x}$ $\quad$ $i(t) = 3e^t - 7\cos(t)$

Entraînement 2

$F(x) = 5x^{10} + x - \frac{1}{3}$ $\quad$ $G(t) = 3\sqrt{t} + \frac{1}{7t}$ $\quad$ $H(x) = \frac{\ln(x)}{2} - e^x$ $\quad$ $I(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2}{5x}$

Entraînement 3

$a(x) = \sin(x) - 3x^4 + 7$ $\quad$ $b(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ $\quad$ $c(x) = \frac{x^6}{6} - e^x$ $\quad$ $d(t) = \ln(t) + \frac{2}{t}$

Savoir Fd. 4: Calcul de dérivée (Composées)

Calculer l'expression des dérivées des fonctions suivantes, et réduire/factoriser lorsque c'est possible.

Entraînement 1

$j(x) = \ln(4 - 3x)$ $\quad$ $k(x) = 2x - 5e^{2-x}$ $\quad$ $f(x) = -2e^{x^2-x}$

$l(x) = (3x - 4)^4$ $\quad$ $m(t) = 2\cos(t^3)$ $\quad$ $n(x) = \dfrac{6}{1 - 4x}$

Entraînement 2

$J(x) = e^{x^2-1}$ $\quad$ $K(x) = 3\ln(4 - x) + 7$ $\quad$ $f(t) = 100e^{-0,1t+2}$

$L(x) = 8\sqrt{-3x} + 1$ $\quad$ $M(x) = (\sin(x))^4$ $\quad$ $N(x) = 5x - 2\ln(2x)$

Entraînement 3

$\varepsilon(x) = x^3 - \cos(x^2 + x)$
(lettre epsilon, prononcée « epsilonne ») $\quad$ $f(x) = 3\,e^{1-4x}$ $\quad$ $\varphi(y) = 3\ln\left(\dfrac{y}{3} - 1\right)$

$g(x) = \left(3 - \dfrac{2}{x}\right)^2$ $\quad$ $h(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ $\quad$ $i(x) = \dfrac{1}{e^{3-5x}}$

Savoir Fd. 5: Calcul de dérivée
(Produits et quotients)

Calculer l'expression des dérivées des fonctions suivantes, et réduire/factoriser/mettre sous forme d'un seul quotient lorsque c'est possible.

Entraînement 1

$f(x) = (2x - 5)e^x$ $\quad$ $g(x) = (3x - x^2)\ln(x) + 3x$ $\quad$ $h(x) = \dfrac{x^2}{1 - 2x}$

$i(x) = (4 - x)\ln(2x - 3)$ $\quad$ $j(x) = \sin(2x) + x^2e^{5-2x}$ $\quad$ $k(x) = \dfrac{1}{x + e^x}$

Entraînement 2

$a(x) = x^2 + (3 + x^2)\ln(x)$ $\quad$ $b(x) = (x^3 - 2x^2)e^x$ $\quad$ $C(x) = \dfrac{1}{1 + \sin(3x + 1)}$

$d(x) = (3x - 2)e^{-5x}$ $\quad$ $\varepsilon(x) = (1 - 3x^2)\ln(3x - 3) - 3x^2$
(lettre epsilon, prononcée « epsilonne ») $\quad$ $f(x) = \dfrac{4 - e^x}{1 - x}$

Entraînement 3

$f(x) = (x - x^2)e^x$ $\quad$ $g(x) = 3x\ln(x) + 4x$ $\quad$ $C(x) = \dfrac{x^2 + e^x}{4 - 3x}$

$F(x) = (4 - x)\ln(3x + 1)$ $\quad$ $G(x) = 6x\,e^{2x} - 3e^{2x} + 4$ $\quad$ $B(x) = x\sqrt{x^3 - 4x}$

Savoir Fd. 6 : Variations d'une fonction

Entraînement 1

1) On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction f par : $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$.

a) Calculer $f'(x)$ et mettre au même dénominateur.

b) Donner le tableau de variation de f. En déduire un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [-4\,;\,-1]$.

2) On définit sur $[-1; 1]$ la fonction A par $A(x) = 2 + e^{2-x^2}$.

a) Déterminer le sens de variation de A sur $[-1; 1]$.

b) Justifier que, pour $x \in [-1; 1]$ on a $A(x) \leq 10$.

Entraînement 2

1) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par : $g(x) = -x^3 - \frac{x^2}{2} + 14x + 8$.

a) Calculer $g'(x)$ et donner son tableau de signe.

b) En déduire, pour $x < 0$, la valeur minimale exacte atteinte par la fonction $g(x)$.

2) La fonction T est définie sur $[0; e]$ par $T(x) = 3x^2 - 12\ln(x + 1)$.

a) Montrer que, pour $x \in [0; e]$, on a $T'(x) = \frac{6(x^2+x-2)}{x+1}$.

b) Donner un encadrement de $T(x)$ pour $0 \leq x \leq e - 1$.

Entraînement 3

1) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction *i* par : $i(x) = \frac{x^3}{4} - 3x + 2$.

a) Donner le tableau de variation de la fonction i.

b) En déduire un encadrement de la fonction $i(x)$ sur l'intervalle [−4 ; 0].

2) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h par $h(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

a) Montrer que la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $h(x) \geq 0$ quand $x \geq 0$.

Savoir Fd. 7 : Tangentes

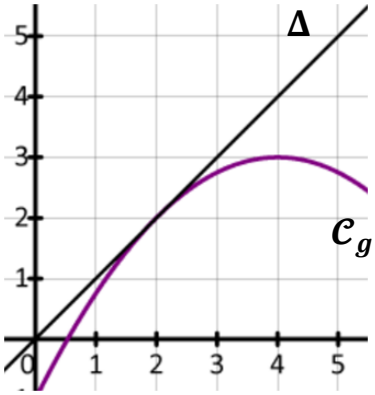
Entraînement 1

1) Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = 2x^3\ \ln(x) - 2$.

On donne sa dérivée : $g'(x) = 2x^2(3\ln(x) + 1)$.

Écrire une équation de la tangente T à C_g au point d'abscisse 1.

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + 2x + b$, où a et b sont deux nombres réels.
On donne ci-contre sa représentation graphique $\mathcal{C}_g$, ainsi que la droite Δ qui est la tangente en $x = 2$ à la courbe $\mathcal{C}_g$.



a. Déterminer graphiquement $g(2)$ et $g'(2)$.

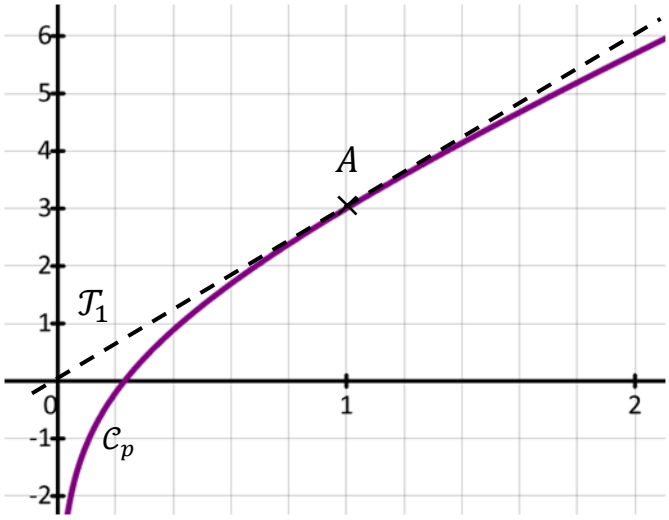
b. En déduire les valeurs de a et de b.

Entraînement 2

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par : $g(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$. On donne sa dérivée $g'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

Déterminer une équation de la tangente T à C_g au point d'abscisse -2.

2) On définit sur $\left]\frac{1}{e}\,;\frac{4}{e}\right[$ la fonction $p(x) = ax + \ln(bx)$ où a et b sont deux nombres réels.
On donne ci-contre la représentation graphique $\mathcal{C}_p$ de p. On sait que le point $A(1;3)$ appartient à $\mathcal{C}_p$.
On a aussi tracé $\mathcal{T}_1$ la tangente à $\mathcal{C}_p$ au point d'abscisse 1.



a) Déterminer $p'(1)$ et en déduire a.

b) Déterminer l'expression algébrique de $p(x)$.

Entraînement 3

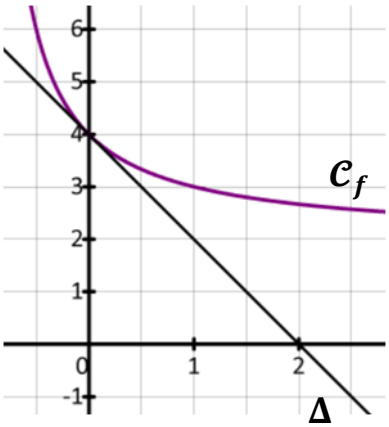
1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x) = (x^2 + x)\ln(x) + 3$.

On donne sa dérivée : $f'(x) = 1 + x + (2x + 1)\ln(x)$.

Écrire une équation de la tangente T à la courbe C_f de la fonction f au point d'abscisse 1.

2) Soit f une fonction définie sur $]-1;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{ax+b}{1+x}$, où a et b sont deux nombres réels.

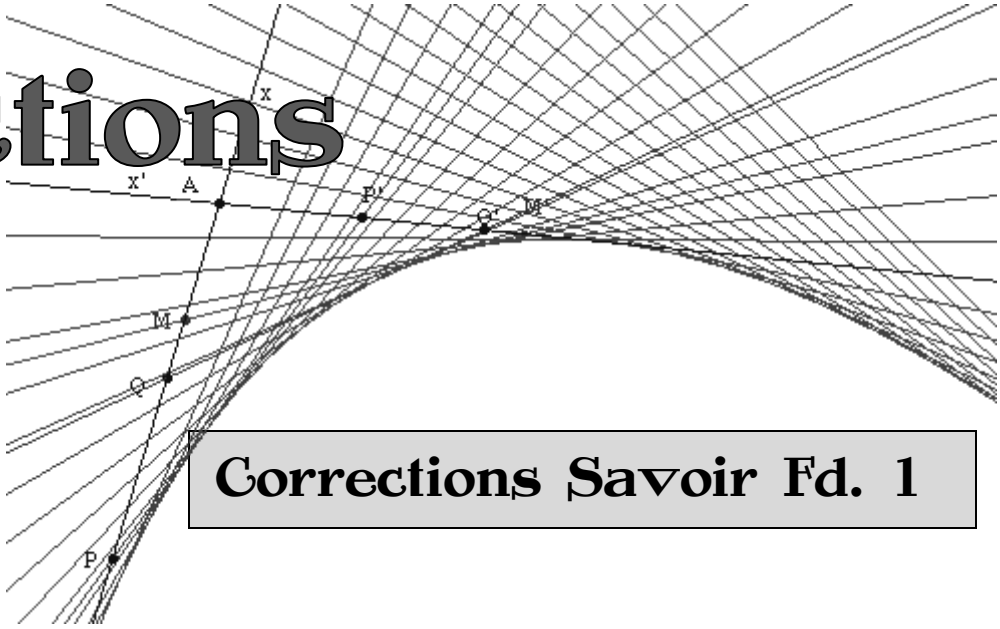
On donne ci-contre sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$, ainsi que la droite Δ qui est la tangente en $x = 0$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.



a. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.

b. En déduire les valeurs de a et de b.

Corrections



Corrections Savoir Fd. 1

Corrigé Entraînement n°1

1) **Valeur exacte :** $f(1) = (3-2)e^1 - e^{1^2-1} = e - e^0 = \boldsymbol{e-1}$. **Valeur approchée :** $f(1) \simeq \mathbf{1,72}$.

2)

x	$-\infty$		$+\infty$
-2		$-$	
e^{1-3x}		$+$	
$g(x)$		$-$	

x	0		1		$+\infty$
$1-x^2$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$	$\|$	$+$	
$h(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

Corrigé Entraînement 2

1) **Valeur exacte :** $A = \dfrac{2e^{5-2^2} - e^{(1-2)^2}}{e^{1-(3-2)}} = \dfrac{2e^{5-4} - e^{(-1)^2}}{e^{1-1}} = \dfrac{2e^1 - e^1}{e^0} = \dfrac{2e-e}{1} = \boldsymbol{e}$.

Valeur approchée : $A \simeq \mathbf{2,72}$.

2) La fonction $g(x)$ est la somme de deux termes strictement positifs, une exponentielle (toujours positive) et 2.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

x	1		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Corrigé Entraînement 3

1) **Valeur exacte :** $A = \dfrac{3e^{2\times3-6}+1}{e^{1-2}} = \dfrac{3e^0+1}{e^{-1}} = \dfrac{3+1}{\frac{1}{e}} = \boldsymbol{4e}$. **Valeur approchée :** $A \simeq \mathbf{10,9}$.

2) $h(x) = 2(e^x - 1)$ Pour k : $\Delta = 1; x_1 = 2\ ; x_2 = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
2		$+$	$\|$	$+$	
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
e^{1-x}		$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	

Corrigé Entraînement 4

1) **Valeur exacte :** $f(-2) = \dfrac{e^{-4+4}}{e^{-2+1}+e^{-2+2}} = \dfrac{e^0}{e^{-1}+e^0} = \dfrac{1}{\frac{1}{e}+1} = \dfrac{1}{\frac{1+e}{e}} = \boldsymbol{\dfrac{e}{1+e}}$.

Valeur approchée : $f(-2) \simeq \mathbf{0,73}$.

2) Comme $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, on a par produit $x^2e^x \geq 0$ et donc $x^2e^x + 1 \geq 1 > 0$
(g somme d'un terme positif et d'un terme strictement positif)

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

x	-2		0		3
x		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$	$\|$	$+$	
$h(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Corrections Savoir Fd. 2

Corrigé Entraînement n°1

1) $f(2) = 3 \times 2 - 1 + 2\ln(2^2 - 3) = 5 + 2\ln 1 = \mathbf{5}$.
et $g(e) = (e+e)\left(\ln e + \ln\left(\frac{e}{e}\right)\right) = 2e(1 + \ln 1) = \boldsymbol{2e}$.

2)

x	0		$\mathbf{1}$		$\mathbf{3}$		$+\infty$
$2x-6$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$h(x)$	$\|\|$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Corrigé Entraînement 2

1) $l(1) = 4\ln(3) - \ln(4-1) = 4\ln 3 - \ln 3 = \mathbf{3\ln 3}$.

$m\left(\frac{1}{2e}\right) = \ln\left(\frac{2}{\left(\frac{1}{2e}\right)}\right) - 3\ln\left(2 \times \frac{1}{2e}\right) = \boldsymbol{\ln(4e) - 3\ln\left(\frac{1}{e}\right)}$.

2) $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$.

x	0		$\boldsymbol{e}$		$+\infty$
$-3x$	0	$-$	$\|$	$-$	
$1-\ln x$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$p(x)$	$\|\|$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Corrigé Entraînement 3

1) $h(0) = 2\ln(1) + 1 = 2 \times 0 + 1 = \mathbf{1}$.

$h\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \left(2 - \frac{1}{e} + 1\right)\ln\left(\frac{1}{e} - 1 + 1\right) + 1 = \boldsymbol{\left(3 - \frac{1}{e}\right)\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1}$.

2)

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$	
$i(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	

Corrigé Entraînement 4

1) $\varphi(1) = \frac{\ln(1)}{1+1^2} = \mathbf{0}$ et $\varphi\left(2-\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln\left(2-\left(2-\frac{1}{e}\right)\right)}{1+\left(2-\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{4-\frac{4}{e}+\frac{1}{e^2}} = \frac{\boldsymbol{e^2\ln\left(\frac{1}{e}\right)}}{\boldsymbol{4e^2-4e+1}}$.

2)

x	0		**1**		4
$2x-8$		$-$	$\vert$	$-$	0
$\ln x$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$
$w(x)$	$\vert\vert$	$+$	**0**	$-$	**0**

Corrections Savoir Fd. 3

Corrigé Entraînement n°1

$f'(x) = \mathbf{-1+14x^6}$ $\quad g'(x) = \mathbf{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$ $\quad h'(x) = \mathbf{\frac{x^2}{2}+\frac{6}{x^2}}$ $\quad i'(t) = \mathbf{3e^t+7\sin(t)}$

Corrigé Entraînement 2

$F'(x) = \mathbf{50x^9+1}$ $\quad G'(t) = \mathbf{\frac{3}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{7t^2}}$ $\quad H'(x) = \mathbf{\frac{1}{2x}-e^x}$ $\quad I'(x) = \mathbf{\frac{4x^3}{3}-\frac{2}{5x^2}}$

Corrigé Entraînement 3

$a'(x) = \mathbf{\cos(x)-12x^3}$ $\quad b'(x) = \mathbf{2x+\frac{1}{x^2}}$ $\quad c'(x) = \mathbf{x^5-e^x}$ $\quad d'(t) = \mathbf{\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}}$

Corrections Savoir Fd. 4

Corrigé Entraînement n°1

$j'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{4-3x}} \times \frac{-1}{-1}$
$= \frac{3}{3x-4}$

Rq : $(a-b)\times(-1) = b-a$

$k'(x) = 2-5u'e^u$
$= 2-5(-e^{2-x})$
$= \mathbf{2+5e^{2-x}}$

$f'(x) = -2u'e^u$
$= \mathbf{-2(2x-1)e^{x^2-x}}$

$l'(x) = 4(u')(u)^3$
$= 3(4)(3x-4)^3$
$\boldsymbol{l'(x) = 12(3x-4)^3}$

$m'(t) = -2\,u'\sin(u)$
$= \mathbf{-6t^2\sin(t^3)}$

$n'(x) = -\frac{6u'}{u^2} = \frac{-6(-4)}{(1-4x)^2} = \mathbf{\frac{24}{(1-4x)^2}}$

Corrigé Entraînement 2

$J'(x) = u'e^u = \mathbf{2x\,e^{x^2-1}}$ $\quad K'(x) = \frac{3u'}{u}+0 = \frac{-3}{4-x} = \mathbf{\frac{3}{x-4}}$

$f'(t) = 100u'e^u$
$= 100(-0{,}1e^{-0{,}1t+2})$
$= \mathbf{-10e^{-0{,}1t+2}}$

$L'(x) = \frac{8u'}{2\sqrt{u}} = \frac{8(-3)}{2\sqrt{-3x}} = \mathbf{\frac{-12}{\sqrt{-3x}}}$ $\quad M'(x) = 4(u')(u)^3$
$= 4\cos(x)\,(\sin(x))^3$

$N'(x) = 5-\frac{2u'}{u}$
$= 5-\frac{4}{2x} = 5-\frac{2}{x} = \mathbf{\frac{5x-2}{x}}$

Corrigé Entraînement 3

$\varepsilon'(x)$
$= \mathbf{3x^2 + (2x+1)\sin(x^2+x)}$

$f'(x) = 3(-4)e^{1-4x}$
$= \mathbf{-12e^{1-4x}}$

$\varphi'(y) = \dfrac{3 \times \frac{1}{3}}{\frac{y}{3}-1} = \dfrac{1}{\left(\frac{y}{3}-1\right)} \begin{matrix}\times 3 \\ \times 3\end{matrix}$
$= \mathbf{\dfrac{3}{y-3}}$

$g'(x) = 2(u')(u)$
$= 2\left(\dfrac{2}{x^2}\right)\left(3-\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{4}{x^2}\left(\dfrac{3x-2}{x}\right)$
$= \mathbf{\dfrac{4(3x-2)}{x^3}}$

$h'(x) = \dfrac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}$
$h'(x) = \mathbf{\dfrac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}}$

$i'(x) = -\dfrac{-5e^{3-5x}}{(e^{3-5x})^2} = \mathbf{\dfrac{5e^{3-5x}}{(e^{3-5x})^2}}$

Corrigé Entraînement 4

$a'(x) = \mathbf{6e^{6x-2}}$

$b'(x) = \mathbf{10x - \dfrac{2x}{1+x^2}}$

$\varphi'(s) = \dfrac{1}{2}(-2s)e^{1-s^2}$
$= \mathbf{-s\,e^{1-s^2}}$

$f'(x) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{-1}{1-x} = \mathbf{\dfrac{-2}{3(1-x)}}$
$= \dfrac{2}{3(x-1)}$

$g'(x) = 3 \times 2(u')(u)$
$= 6(-e^{-x})(1+e^{-x})$
$g'(x) = \mathbf{-6(1+e^{-x})e^{-x}}$

$h'(x) = -\dfrac{(-2)(\cos(x))}{(\sin x)^2}$
$= \mathbf{\dfrac{2\cos(x)}{\sin^2(x)}}$

Corrections Savoir Fd. 5

Corrigé Entraînement n°1

$f'(x) = 2e^x + (2x-5)e^x$
$= [2+(2x-5)]e^x = \mathbf{(2x-3)e^x}$

$g'(x) = (3-2x)\ln(x) + (3x-x^2)\frac{1}{x} + 3$
$= \mathbf{(3-2x)\ln(x) + 6 - x}$

$h'(x) = \dfrac{2x(1-2x) - x^2 \times (-2)}{(1-2x)^2}$
$= \dfrac{2x-2x^2}{(1-2x)^2} = \mathbf{\dfrac{2x(1-x)}{(1-2x)^2}}$

$i'(x) = -1\ln(2x-3) + (4-x) \times \dfrac{2}{2x-3}$
$= \mathbf{-\ln(2x-3) + \dfrac{2(4-x)}{2x-3}}$

$j'(x) = 2\cos(2x) + 2x\,e^{5-2x} + x^2(-2e^{5-2x})$
$= 2\cos(2x) + (2x-2x^2)e^{5-2x}$
$= \mathbf{2\left(\cos(2x) + x(1-x)e^{5-2x}\right)}$

$k'(x) = -\dfrac{u'}{u^2} = \mathbf{-\dfrac{1+e^x}{(x+e^x)^2}}$

Corrigé Entraînement 2

$$a'(x) = 2x + 2x\ln(x) + (3+x^2)\frac{1}{x}$$
$$= \frac{2x^2}{x} + 2x\ln(x) + \frac{3+x^2}{x}$$
$$= \mathbf{2x\ln(x) + \frac{3+3x^2}{x}}$$

$$b'(x) = (3x^2-4x)e^x + (x^3-2x^2)e^x$$
$$= [(3x^2-4x) + (x^3-2x^2)]\,e^x$$
$$= (x^3+x^2-4x)e^x = \mathbf{x(x^2+x-4)e^x}$$

$$C'(x) = -\frac{\mathbf{3\cos(3x+1)}}{\mathbf{(1+\sin(3x+1))^2}}$$

$$d'(x) = 3e^{-5x} + (3x-2)(-5e^{-5x})$$
$$= \mathbf{(13-15x)e^{-5x}}$$

$$\varepsilon'(x) = -6x\ln(3x-3) + (1-3x^2)\frac{3}{3x-3} - 6x$$
$$= -6x\ln(3x-3) + \frac{3(1-3x^2)}{3(x-1)} - \frac{6x(x-1)}{x-1}$$
$$= \mathbf{-6x\ln(3x-3) + \frac{-9x^2+6x+3}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x(1-x) - (4-e^x)(-1)}{(1-x)^2}$$
$$= \mathbf{\frac{4-2e^x+xe^x}{(1-x)^2}}$$

Corrigé Entraînement 3

$$f'(x) = (1-2x)e^x + (x-x^2)e^x$$
$$= (1-2x+x-x^2)e^x = \mathbf{(1-x-x^2)e^x}$$

$$g'(x) = 3\ln(x) + 3x\times\frac{1}{x} + 4 = \mathbf{3\ln(x)+7}$$

$$C'(x) = \frac{(2x+e^x)(4-3x) - (x^2+e^x)(-3)}{(4-3x)^2}$$
$$= \frac{8x-3x^2+7e^x-3xe^x}{(4-3x)^2}$$
$$= \mathbf{\frac{x(8-3x)+(7-3x)e^x}{(4-3x)^2}}$$

$$F'(x) = -\ln(3x+1) + (4-x)\frac{3}{3x+1}$$
$$= \mathbf{-\ln(3x+1) + \frac{3(4-x)}{3x+1}}$$

$$G'(x) = 6e^{2x} + 12xe^{2x} - 6e^{2x}$$
$$= \mathbf{12xe^{2x}}$$

$$B'(x) = \sqrt{x^3-4x} + x\frac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-4x}}$$
$$= \frac{x^3-4x+x(3x^2-4)}{2\sqrt{x^3-4x}} = \frac{4x^3-8x}{\sqrt{x^3-4x}} = \mathbf{\frac{2x(x^2-2)}{\sqrt{x^3-4x}}}$$

Corrections Savoir Fd. 6

Corrigé Entraînement n°1

1) $f'(x) = \frac{x^2-16}{4x^2}$.

x	$-\infty$	-4	-1	0	4	$+\infty$
x^2-16	+	0	−	|	− 0	+
$4x^2$	+	|	+	0 +	|	+
$f'(x)$	+	0	−	||	− 0	+
$f(x)$		-2 ↗	↘ $-\frac{17}{4}$	||	↘ 2	↗

Pour $x \in [-4\,;\,-1]$, on a $-\frac{17}{4} \leq f(x) \leq -2$.

2) a) $A'(x) = -2xe^{2-x^2}$.

x	-1		0		1
$-2x$	|	+	0	−	|
e^{2-x^2}	|	+	|	+	|
$A'(x)$	|	+	0	−	|
$A(x)$	$2+e$	↗	$2+e^2$	↘	$2+e$

b) Le maximum de la fonction A sur $[-1;1]$ est $A(0) = 2 + e^2 \simeq 9{,}4$
On a donc $A(x) \leq 2 + e^2 < 9{,}5 < 10$
donc par élargissement $A(x) \leq 10$

Corrigé Entraînement 2

1) $g'(x) = -3x^2 - x + 14$.

$\Rightarrow \Delta = 169$; $x_1 = -\frac{7}{3}$; $x_2 = 2$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	2	$+\infty$
$g'(x)$	−	0	+ 0	−
$g(x)$	↘	$-\frac{793}{54}$ ↗	26	↘

pour $x < 0$, le minimum de $g(x)$ est $-\frac{793}{54}$.

2) a)

$T'(x) = 3 \times 2x - 12 \times \frac{1}{x+1} = \frac{6x(x+1)-12}{x+1} = \frac{6x^2+6x-12}{x+1}$

$= \frac{6(x^2+x-2)}{x+1}$ **CQFD**

b) Pour $x^2 + x - 2$ on a $\Delta = 9$; $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

x	0		1		e
$6x^2+6x-12$	|	−	0	+	|
$x+1$	|	+	|	+	|
$T'(x)$	|	−	0	+	|
$T(x)$	0	↘	$3-12\ln 2$	↗	$3e^2-12\ln(e+1)$

Or : $T(e-1) = 3(e-1)^2 - 12\ln(e-1+1)$

$= 3e^2 - 6e + 3 - 12 = \mathbf{3e^2 - 6e - 9} \simeq \mathbf{-3{,}14}$

Et $e - 1 \in [1; e]$ donc
pour $0 \leq x \leq e-1$ on a : $\mathbf{3 - 12\ln 2 \leq T(x) \leq 0.}$

Corrigé Entraînement 3

1) $i'(x) = \frac{3x^2}{4} - 3 = \frac{3}{4}(x^2 - 4)$.

x	$-\infty$	-4	-2	0	2	$+\infty$
$i'(x)$	+		0	−	0	+
$i(x)$		-2 ↗	6	↘ 2	↘ -2	↗

pour $x \in [-4\,;\,0]$, on a $-2 \leq i(x) \leq 6$.

2) a) $h'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$.

On a $x^2 + 1 > 0$ car somme d'un carré positif et d'un nombre strictement positif.

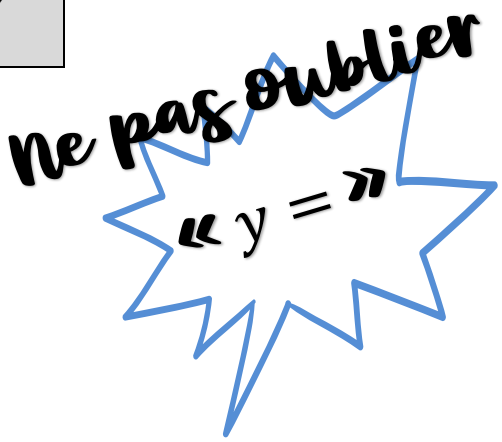
Et pour $x^2 - 2x + 1$ on a $\Delta = 0$ donc c'est de signe constant, celui de a donc positif. On a donc, pour tout x, $h'(x) \geq 0$.

Par conséquent la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$
(vous pouvez, bien sûr, prendre le temps de faire un tableau)

b) Si h est croissante, alors, pour $x \geq 0$,
on a $h(x) \geq h(0)$
Or on a $h(0) = 0 - \ln(0+1) = -\ln 1 = 0$
$\Rightarrow \mathbf{h(x) \geq 0.}$

Corrections Savoir Fd. 7

Corrigé Entraînement n°1



1) L'équation de T est donnée par : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$.

Or on a $g(1) = 2 \times 1^3 \ln(1) - 2 = 2 \times 0 - 2 = -2$

et $g'(1) = 2 \times 1^2(3\ln(1) + 1) = 2 \times (0+1) = 2$.

Donc l'équation de T est donc : $y = 2(x-1) + (-2)$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y = 2x - 4}$

2) **a.** $g(2) = 2$ et $g'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

b. On dérive : $g'(x) = 2ax + 2$ avec $g'(2) = 1 \Rightarrow 2a \times 2 + 2 = 1 \Leftrightarrow 4a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$.

donc $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + b$.

Et $g(2) = 2 \Rightarrow -\frac{1}{4} \times 2^2 + 2 \times 2 + b = 2 \Leftrightarrow 3 + b = 2 \Leftrightarrow b = -1$ donc $\boldsymbol{g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1.}$

Corrigé Entraînement 2

1) L'équation de T est donnée par : $y = g'(-2) \times \big(x - (-2)\big) + g(-2)$.

Or on a $g(-2) = \frac{7}{-1} = -7$ et $g'(-2) = \frac{(-2)^2 + 2\times(-2) - 3}{(-2+1)^2} - \frac{3}{(-1)^2} = -3$

Donc l'équation de T est : $y = -3(x + 2) - 7$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y = -3x - 13}$

2) a) graphiquement $p'(1) = 3$ et par ailleurs : $p'(x) = a + \frac{b}{bx} = a + \frac{1}{x}$ donc $p'(1) = a + 1$

donc $a + 1 = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 2}$ On a donc $p(x) = 2x + \ln(bx)$.

b) On sait que $p(1) = 3$ et $p(1) = 2 + \ln b$ donc $2 + \ln b = 3 \Leftrightarrow \ln b = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{b = e}$

En conclusion : $\boldsymbol{p(x) = 2x + \ln(ex)}$.

Corrigé Entraînement 3

1) L'équation de T est donnée par : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Or $f(1) = 0 + 3 = 3$ Et $f'(1) = 1 + 1 + 0 = 2$.

Donc l'équation de T est : $y = 3 + 2(x-1) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 2x + 1.}$

2) **a.** $f(0) = 4$ et $f'(0) = -2$.

b. On a $f(0) = \frac{0+b}{1+0} = b$ donc $\boldsymbol{b = 4}$ et on a $f(x) = \frac{ax+4}{1+x}$.

On a alors $f'(x) = \frac{a(1+x) - (ax+4)\times 1}{(1+x)^2} = \frac{a-4}{(1+x)^2}$ et $f'(0) = a - 4 = -2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 2}$ donc $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x+4}{1+x}}$.