

Savoir F.t. 2 : Parité et périodicité

Entraînement 1

1) Déterminer si les fonctions suivantes sont paires ou impaires.

$$f_1(x) = 3x \cos x$$

$$g_1(x) = 2x^2 - \sin(2x)$$

$$h_1(x) = (\sin x - x)^2$$

2) a. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $i_1(x) = 2 \cos x \sin(2x)$ est-elle 2π -périodique ?

b. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $j_1(x) = 1 - \cos^2\left(\frac{x}{3}\right)$ est-elle 6π -périodique ?

c. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $k_1(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ est-elle de période $\frac{\pi}{6}$?

Entraînement 2

1) Déterminer si les fonctions suivantes sont paires ou impaires.

$$f_2(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$g_2(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$$

$$h_2(x) = (1 - x^2) \tan x$$

2) a. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $i_2(x) = \sin(2x) - \cos(x)$ est-elle π -périodique ?

b. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $j_2(x) = 3 \sin\left(\frac{x}{6} + \frac{3\pi}{2}\right)$ est-elle de période 3π ?

c. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $k_2(x) = \frac{1}{2} \cos(1 - 6x)$ est-elle de période $\frac{\pi}{3}$?

Corrigé Savoir Ft. 2

Corrigé Entraînement 1

1) $f_1(-x) = 3(-x) \cos(-x) = -3x \cos x = -f_1(x)$ la fonction f_1 est **impaire**

$$g_1(-x) = 2(-x)^2 - \sin(-2x) = 2x^2 - (-\sin(2x)) = 2x^2 + \sin(2x)$$

$\Rightarrow g_1$ n'est **ni paire, ni impaire**

$$h_1(-x) = (\sin(-x) - (-x))^2 = (-\sin x + x)^2 = (-(\sin x - x))^2 = (\sin x - x)^2 = h_1(x)$$

$\Rightarrow h_1$ est **paire**

2) a. $i_1(x + 2\pi) = 2 \cos(x + 2\pi) \sin(2(x + 2\pi)) = 2 \cos x \sin(2x + 4\pi) = 2 \cos x \sin 2x = i_1(x)$

La fonction i_1 est **2π -périodique**

b. $j_1(x + 6\pi) = 1 - \cos^2\left(\frac{x+6\pi}{3}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{x}{3}\right) = j_1(x)$

La fonction j_1 est **6π -périodique**

c. $k_1\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(3x + \pi) \neq \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

La fonction **n'est pas de période $\frac{\pi}{6}$**

Corrigé Entraînement 2

1) $f_2(-x) = \cos\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f_2$ n'est **ni paire, ni impaire**

$$g_2(-x) = \frac{\sin(-2x)}{-x} = \frac{-\sin(2x)}{-x} = \frac{\sin(2x)}{x} = g_2(x) \Rightarrow g_2 \text{ est } \textbf{paire}$$

$$h_2(-x) = (1 - (-x)^2) \tan(-x) = (1 - x^2) \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = (1 - x^2) \frac{-\sin x}{\cos x} = -(1 - x^2) \tan x = -h_2(x)$$

$\Rightarrow h_2$ est **impaire**

2) a.

$$i_2(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) - \cos(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) - (-\cos x) = \sin(2x) + \cos(x) \neq i_2(x)$$

La fonction i_2 **n'est pas π -périodique**

b. $j_2(x + 3\pi) = 3 \sin\left(\frac{x+3\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = 3 \sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = 3 \sin\left(\frac{x}{6} + 2\pi\right) = 3 \sin\left(\frac{x}{6}\right) \neq j_2(x)$

La fonction j_2 **n'est pas 3π -périodique**

c. $k_2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(1 - 6\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} \cos(1 - 6x - 2\pi) = \frac{1}{2} \cos(1 - 6x) = k_2(x)$

La fonction k_2 **est de période $\frac{\pi}{3}$**