Chapitre 11 : Primitives et équations différentielles

I. Primitives

1) Définition

Savoir Ed.1

Définition : Soit f une fonction définie sur I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $\boldsymbol{F' = f}$

Application 1 : Montrer qu'une fonction est une primitive

⇒ **Méthode** : pour montrer qu'une fonction F est une primitive de f, on la dérive et on doit trouver $F' = f$

Exemples :

1) Soit $f(x) = 4(x+1)e^{2x}$. Montrer que $F(x) = (2x+1)e^{2x}$ est une primitive de f

$\Rightarrow \quad F'(x) = 2e^{2x} + (2x+1) \times 2e^{2x} = (2 + (2x+1) \times 2)e^{2x} = (2 + 4x + 2)e^{2x} = (2x+4)e^{2x} = f(x)$

On a bien $F'(x) = f(x)$ donc F est bien une primitive de F

2) Soit, pour $x \geq 0$, $f(x) = \frac{1-2x}{1+2x}$. La fonction $F(x) = \ln(2x+1) - 2x + 1$ est-elle une primitive de f ?

$\Rightarrow \quad F'(x) = \frac{2}{2x+1} - 2 = \frac{2-2(2x+1)}{2x+1} = \frac{2-4x-2}{2x+1} = \frac{-4x}{2x+1}$

On a $F' \neq f$ donc F n'est pas une primitive de f

Application 2 : Déterminer une primitive avec condition

Propriétés :
- Toute fonction f **continue** sur I admet une infinité de primitives sur I
- Si F est une primitive sur I, alors les autres primitives de f sur I sont de la forme :
  $\boldsymbol{\Phi : x \mapsto F(x) + k}$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante
- Il existe une **unique** primitive telle que $\boldsymbol{\Phi(x_0) = y_0}$

⇒ **Méthode** : Si F est une primitive de f, alors $\Phi = F + k$ est la forme générale de toutes les primitives de f
Si on doit avoir $\Phi(a) = b$ on résout $F(a) + k = b$ équation en k

Exemple :

$F(x) = \ln(2x+1) - x + 1$ est une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1-2x}{1+2x}$ pour $x \geq 0$

1) Donner la forme générale de toutes les primitives de f

$\Rightarrow \quad \Phi(x) = \ln(2x+1) - x + 1 + k$, avec $k \in \mathbb{R}$

2) Déterminer la primitive de f qui prend la valeur 3 en $x = 0$

$\Rightarrow \quad \Phi(0) = 3 \iff \ln(1) + 1 + k = 3 \iff k = 3 - 1 = 2$

Donc $\boldsymbol{\Phi(x) = \ln(2x+1) - x + 3}$