**Chapitre 3** **2ème partie**

# Suites arithmétiques et géométriques
# Propriétés

**Savoirs**

- **Sag. 5** Sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique
- **Sag. 6** Dépassement de seuil
- **Sag. 7** Limites
- **Sag. 8** Algorithmes (voir TP fin d'année)

# EXERCICES en classe

# Savoir Sag. 5 : Sens de variation

## Exercice 0 : Rappels sur les suites ?

**a)** Suite **arithmétique** de raison *0,8* et de 1er terme $u_0 = 2$. Donner $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$

**b)** Suite **géométrique** de raison *0,5* et de 1er terme $u_0 = 1{,}2$. Donner $u_n$ en fonction de $n$

**c)** Suite **géométrique** de raison *–2* et de 1er terme $u_1 = 10$. Donner la relation de récurrence de $u_n$

**d)** Suite **arithmétique** de raison *10* et de 1er terme $u_1 = -5$. Donner $u_n$ en fonction de $n$

**e)** Suite **arithmétique** de raison *–1* et de 1er terme $u_0 = 5{,}4$. Donner $u_n$ en fonction de $u_{n-1}$

**f)** Suite **géométrique** de raison *0,7* et de 1er terme $u_1 = 1$. Donner la formule explicite de $u_n$

**g)** Suite **arithmétique** de raison $\frac{3}{2}$ et de 1er terme $u_0 = 0{,}1$. Donner $u_n$ en fonction de $n$

**h)** Suite **géométrique** de raison $\frac{1}{3}$ et de 1er terme $u_1 = -1$. Donner $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$

## Exercice 1 : Sens de variation des arithmétiques

Déterminer le sens de variation des suites en justifiant.

**1)** $(u_n)$ : arithmétique de raison –5 et 1er terme $u_0 = 3$

**2)** $(v_n)$ : arithmétique de raison 3 et 1er terme $v_1 = -10$

**3)** $(w_n)$ : arithmétique de raison 0 et 1er terme $w_0 = -110$

**4)** $(z_n)$ : arithmétique de raison $\frac{2}{3}$ et 1er terme $z_2 = 6$

**5)** $(a_n)$ : arithmétique de raison –4 et 1er terme $a_0 = -8$

**6)** $(b_n)$ définie par la relation de récurrence $\begin{cases} b_{n+1} = b_n - 102 \\ b_3 = -15 \end{cases}$

## Exercice 2 : Sens de variation des géométriques

Déterminer le sens de variation des suites en justifiant.

**1)** $(s_n)$ : géométrique de raison 5 et 1er terme $u_0 = 2$

**2)** $(b_n)$ : géométrique de raison 3 et 1er terme $b_2 = -1$

**3)** $(w_n)$ : géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et 1er terme $w_0 = -2$

**4)** $(t_n)$ : géométrique de raison –3 et 1er terme $t_1 = 5$

**5)** $(e_n)$ : géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et 1er terme $e_0 = -100$

**6)** $(a_n)$ : géométrique de raison –4 et 1er terme $a_1 = -8$

**7)** $(U_n)$ : géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et 1er terme $U_0 = 27$

**8)** $(d_n)$ : géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et 1er terme $d_3 = -\frac{1}{2}$

**9)** $(v_n)$ : définie par la relation de récurrence $\begin{cases} v_{n+1} = 0{,}7v_n \\ v_0 = 1200 \end{cases}$

**10)** $(C_n)$ : géométrique de raison 1 et 1er terme $C_0 = -25$

## Exercice 3 : Contexte 1

En 2000, la production mondiale de plastique était de 187 millions de tonnes. On suppose que depuis 2000, cette production augmente de 3,7 % chaque année.
On modélise la production mondiale de plastique, en millions de tonnes, produite en l'année $2000 + n$ par la suite de terme général un où $n$ désigne le nombre d'année à partir de l'an 2000.
Ainsi, $u_0 = 187$.

**1**. Montrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.

**2**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

**3**. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**4**. Selon cette estimation, calculer la production mondiale de plastique en 2019. Arrondir au million de tonnes.

---

**Pour celles et ceux qui continuent les maths en terminale**

---

## Exercice 4 : Autres suites

### • 1er cas : suite définie par une formule explicite

**Méthode 1** :
$u_n = f(n)$ et on connait le sens de variation de $f$
Si $f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors $(u_n)$ est croissante
Si $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ alors $(u_n)$ est décroissante

a) $v_n = (n+3)^2$ b) $s_n = -2n^3$

**Méthode 2** :
On calcule $u_{n+1}$ en fonction de $n$
Puis on calcule $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $n$
Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite $(u_n)$ est croissante
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite $(u_n)$ est décroissante

a) $u_n = -2n^2 + 1$ b) $w_n = \frac{1}{n+1}$

### • 2ème cas : suite définie par une relation de récurrence

**Méthode 1** :
On peut exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $n$
Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite $(u_n)$ est croissante
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite $(u_n)$ est décroissante

a) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3n \\ a_0 = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} b_{n+1} = b_n + n^2 - 9 \\ b_1 = -5 \end{cases}$

**Méthode 2** :
La suite $(u_n)$ est une suite de termes strictement positifs et on peut exprimer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de $n$
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite $(u_n)$ est croissante
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite $(u_n)$ est décroissante

a) $u_n = \frac{1}{n+5}$ b) $w_n = \frac{2}{5^n}$

## Exercice 5 : Type bac

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier n par : $u_n = \frac{8n-4}{n+1}$

**1.** Calculer le terme d'indice 3 de la suite $(u_n)$.

**2.** On considère la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{8x-4}{x+1}$ dont la dérivée est $f'(x) = \frac{4}{x^2+2x+1}$

**a.** Démontrer que la fonction $f$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

**b.** En déduire la monotonie de la suite $(u_n)$.

# Savoir Sag. 6 : Dépassement de seuil

## Exercice 6 : Suites arithmétiques

**1)** $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison 10 et de 1^er terme $v_0 = 2$.
À partir de quel rang passe-t-elle au-delà de 500 ?

**2)** $(a_n)$ est une suite arithmétique de raison $\frac{2}{5}$ et de 1^er terme $a_0 = 0$.
À partir de quel rang passe-t-elle au-delà de 10 ?

**3)** $(w_n)$ est une suite arithmétique de raison −4 et de 1^er terme $w_1 = 12$.
À partir de quel rang passe-t-elle au-delà de −60 ?

**4)** $(c_n)$ est une suite arithmétique de raison −0,1 et de 1^er terme $c_1 = 0{,}3$.
À partir de quel rang passe-t-elle au-delà de −4 ?

## Exercice 7 : Suites géométrique

**1)** $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 5 et de 1^er terme $u_0 = 0{,}8$.
À partir de quel rang passe-t-elle au-delà de 600 ?

**2)** $(b_n)$ est une suite géométrique de raison 4 et de 1^er terme $b_0 = -5$.
À partir de quel rang passe-t-elle au-delà de −1000 ?

**3)** $(s_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de 1^er terme $s_0 = 288$.
À partir de quel rang passe-t-elle au-delà de 50 ?

**4)** $(d_n)$ est une suite géométrique de raison −3 et de 1^er terme $d_0 = 10$.
À partir de quel rang passe-t-elle au-delà de 100 ?

## Exercice 8 : Contexte 1

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6 000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par $u_n$ le nombre d'abonnés en 2019 + $n$ pour tout entier naturel $n$.

**1.** Calculer le nombre d'abonnés en 2020 et 2021.

**2.** Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

**3.** Quelle est la nature de la suite $(u_n)$?

**4.** En déduire une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**5.** En quelle année le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019 ?

## Exercice 9 : Contexte 2

En 2002, Camille a acheté une voiture, son prix était alors de 10 500 €. La valeur de cette voiture a baissé de 14 % par an.

**1.** La valeur de cette voiture est modélisée par une suite.
On note $P_n$ la valeur de la voiture en l'année $2002 + n$. On a donc $P_0 = 10\,500$.

- **a.** Déterminer la nature de la suite $(P_n)$.
- **b.** Quelle était la valeur de cette voiture en 2010 ?

**2.** À partir de quelle année la valeur de la voiture de Camille devient inférieure à 1 500 €.

# Savoir Sag. 7 : Limite d'une suite

## Exercice 10 : Notion de limite d'une suite

Pour chacune des suites, conjecturer sur sa limite éventuelle.

**1) À partir d'un tableau de valeurs.**

$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) \quad et \quad u_0 = 6$

| n | Un |
|---|---|
| 0 | 6 |
| 1 | 3,25 |
| 2 | 2,086538462 |
| 3 | 1,76216324 |
| 4 | 1,732308093 |
| 5 | 1,732050827 |
| 6 | 1,732050808 |
| 7 | 1,732050808 |

$v_n = n + 4\sin n$

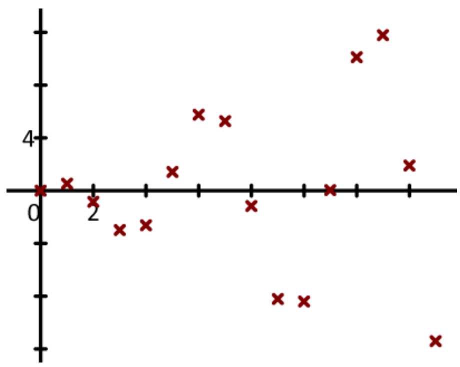
| n | Vn |
|---|---|
| 6 | 5,720584502 |
| 7 | 7,656986599 |
| 8 | 8,989358247 |
| 9 | 9,412118485 |
| 10 | 9,455978889 |
| 11 | 10,00000979 |
| 12 | 11,46342708 |
| 13 | 13,42016704 |

$w_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

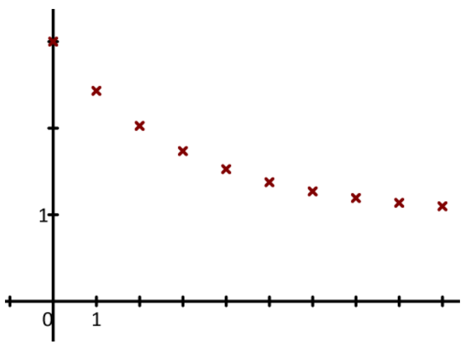
| n | Vn |
|---|---|
| 3 | -3,375 |
| 4 | 5,0625 |
| 5 | -7,59375 |
| 6 | 11,390625 |
| 7 | -17,0859375 |
| 8 | 25,62890625 |
| 9 | -38,44335938 |
| 10 | 57,66503906 |

**2) À partir d'un graphique (formule explicite)**

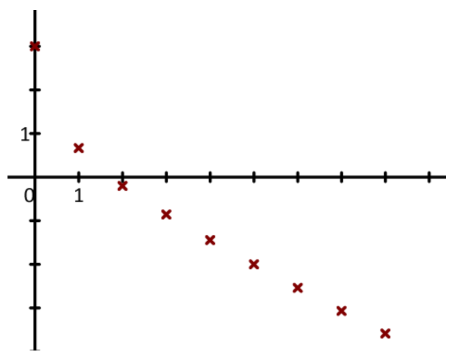
$a_n = n \times cos\, n$




$b_n = 2e^{-\frac{n}{3}} + 1$




$c_n = \frac{n^2+1}{3-n}$




## Exercice 11 : Suites arithmétiques

Toutes les suites de cet exercice sont des suites arithmétiques. Déterminer leur limite

| **1)** Suite | $(u_n)$ | $(a_n)$ | $(b_n)$ | $(v_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1[er] terme et raison $r$ | $r = 2$ <br> $u_0 = 60$ | $r = -3$ <br> $a_0 = 25$ | $r = 0,6$ <br> $b_1 = -150$ | $r = -\frac{2}{9}$ <br> $v_0 = -3$ |
| Limite | | | | |

| **2)** Relation de récurrence | $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \\ a_0 = 10 \end{cases}$ | $\begin{cases} b_{n+1} = b_n - \frac{10}{3} \\ b_0 = 9 \end{cases}$ | $\begin{cases} v_n = v_{n-1} - 0,001 \\ v_1 = 200\,000 \end{cases}$ | $\begin{cases} t_{n+1} = 2,3 + t_n \\ t_1 = 6 \end{cases}$ |
|---|---|---|---|---|
| Limite | | | | |

| **3)** Terme général | $a_n = 10 + 9n$ | $b_n = 2(n-1) - 6$ | $c_n = -120 - \frac{2n}{3}$ | $d_n = 2 + \frac{n}{6}$ |
|---|---|---|---|---|
| Limite | | | | |

## Exercice 12 : Suites géométrique

Toutes les suites de cet exercice sont des suites géométriques. Déterminer leur limite

| **1)** Suite | $(u_n)$ | $(a_n)$ | $(b_n)$ | $(v_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1er terme et raison $q$ | $q = 2$ $u_0 = 60$ | $q = 0{,}2$ $a_0 = 20$ | $q = \frac{10}{7}$ $b_1 = -150$ | $q = 10^{-1}$ $v_0 = -3$ |
| Limite | | | | |

| **2)** Relation de récurrence | $\begin{cases} a_n = 3\,a_{n-1} \\ a_0 = 10 \end{cases}$ | $\begin{cases} b_{n+1} = \frac{7}{3}\,b_n \\ b_0 = -2 \end{cases}$ | $\begin{cases} v_n = 0{,}4\,v_{n-1} \\ v_1 = 200\,000 \end{cases}$ | $\begin{cases} t_{n+1} = -\dfrac{t_n}{3} \\ t_1 = 162 \end{cases}$ |
|---|---|---|---|---|
| Limite | | | | |

| **3)** Terme général | $a_n = 10 \times 9^n$ | $b_n = -2 \times 1{,}65^{n-1}$ | $u_n = 6 \times (-0{,}9)^n$ | $v_n = 1500 \times 0{,}78^{n-1}$ |
|---|---|---|---|---|
| Limite | | | | |

## Exercice 13 : Contexte 1

À l'instant $t = 0$, on injecte à un patient une dose de 2 mg d'un médicament. On suppose que ce médicament se répartit uniformément dans le sang et que, chaque heure, le corps en élimine 25%. Pour tout entier $n$, on note $R_n$ la masse en mg de médicament présente dans le sang au bout de $n$ heures.

**a)** Montrer que la suite $R_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

**b)** Exprimer $R_n$ en fonction de $n$.

**c)** Quel est le sens de variation de cette suite ? Interpréter concrètement le résultat.

**d)** Quelle est la limite de cette suite ? Interpréter concrètement le résultat.

## Exercice 14 : Contexte 2

Une entreprise achète en début 2010 une machine-outil neuve pour 220 000 €. Le service comptable observe que, sur l'année 2010, la machine se déprécie (*ie.* perd de la valeur) d'environ 15%.
On suppose que cette baisse annuelle de 15% perdure au-delà de 2010.
On note $V_n$ la valeur estimée de la machine au bout de $n$ années de fonctionnement à partir de 2010.

**1)** Déterminer la nature de la suite, en préciser la raison et le 1er terme.

**2)** En déduire $V_n$ en fonction de $n$

**3)** Calculer la valeur estimée de la machine en 2015. *Arrondir à l'euro près.*

**4)** Déterminer le sens de variation et la limite de cette suite. Interpréter concrètement les résultats.

## Exercice 15 : Type bac 1

Pour limiter la hausse des températures moyennes de la planète, une diminution des émissions de gaz à effet de serre s'avère nécessaire. Dans ce but, le gouvernement français s'est donné comme objectif de diviser par quatre les émissions de gaz à effet de serre en France de 2006 à 2050.
En 2006, les émissions de gaz à effet de serre en France s'élevaient à 547 millions de tonnes d'équivalent $CO_2$ (dioxyde de carbone). (*Source : CITEPA*)

**Partie A : Étude d'un premier modèle**

Dans cette partie, on suppose que les émissions de gaz à effet de serre en France baisseront chaque année de 9,3 millions de tonnes à partir de l'année 2006.
Soit $n$ un entier naturel. On note $u_n$ les émissions de gaz à effet de serre en France au cours de l'année 2006 + $n$, en millions de tonnes d'équivalent $CO_2$ . Ainsi, $u_0 = 547$.

**1.** Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ? Préciser sa raison.

**2.** Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

**3.** Déterminer, selon ce modèle, à partir de quelle année les émissions de gaz à effet de serre en France deviendront inférieures à cent millions de tonnes si la tendance se poursuit au-delà de 2050.

**Partie B : Étude d'un second modèle**

Dans cette partie, on suppose que le taux d'évolution annuel sera constant et que les émissions de gaz à effet de serre en France diminueront de 3,1% par an à partir de l'année 2006.
Soit $n$ un entier naturel. On note $v_n$ les émissions de gaz à effet de serre en France au cours de l'année 2006 + $n$, en millions de tonnes d'équivalent $CO_2$.
Ainsi, $v_0 = 547$.

Déterminer, selon ce modèle, à partir de quelle année les émissions de gaz à effet de serre deviendront inférieures à cent millions de tonnes.

*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

**Partie C : Limites**

**a)** Donner la limite de la suite $(v_n)$.

**b)** Que peut-on dire de la limite de la suite $(u_n)$ ? Discuter la cohérence de ce résultat avec la situation modélisée.

## Exercice 16 : Type bac 3

Un jeu vidéo fait évoluer un personnage sur un parcours semé d'obstacles.
Au début du parcours, ce personnage est doté de 1 000 pions noirs dans son sac et il n'a pas de pion blanc.
Le nombre de pions noirs diminue au cours du jeu.
Le personnage gagne 10 pions blancs par minute jouée.
Chaque partie est chronométrée et dure 45 minutes. Au bout des 45 minutes, la partie s'arrête et le joueur a gagné si le nombre de pions blancs gagnés est supérieur ou égal au nombre de pions noirs du sac.

**1. Étude de l'évolution du nombre de pions blancs**

On note $u_n$ le nombre de pions blancs obtenus au bout de $n$ minutes de jeu. Ainsi $u_0 = 0$.

Déterminer la nature de la suite $(u_n)$ et en déduire, pour tout entier $n$, l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**2. Étude de l'évolution du nombre de pions noirs**

Lucas estime qu'au cours d'une partie, le nombre de ses pions noirs diminue de 2 % par minute.
Il voudrait savoir si cette évolution est suffisante pour gagner, ou s'il doit poursuivre son entraînement.
On note $v_n$ le nombre de pions noirs restant à la $n$-ième minute. Ainsi $v_0 = 1000$.

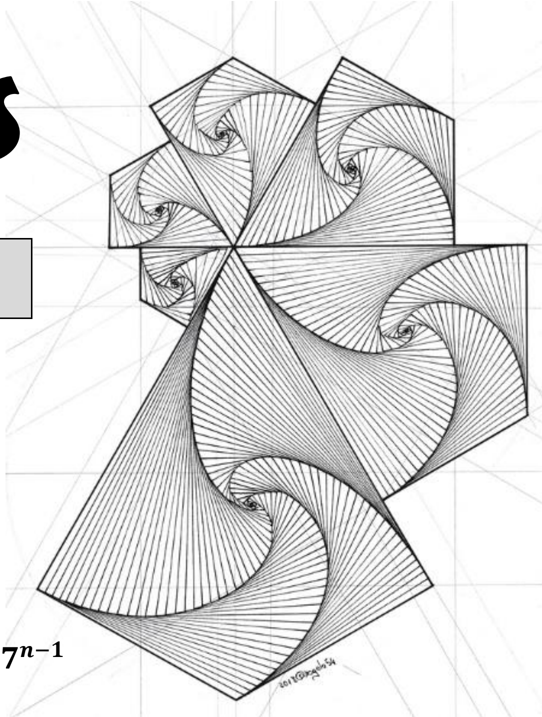
**a.** Justifier que $v_1 = 980$.

**b.** Déterminer la nature de la suite $(v_n)$ et en déduire, pour tout entier $n$, l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.

**3.** On a calculé les premiers termes des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ à l'aide d'un tableur. La feuille de calcul est donnée ci-contre. Les termes de la suite $(v_n)$ ont été arrondis à l'unité.
Lucas peut-il gagner la partie ?

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | $n$ | $u_n$ | $v_n$ |
| 2 | 0 | 0 | 1 000 |
| 3 | 1 | 10 | 980 |
| 4 | 2 | 20 | 960 |
| 5 | 3 | 30 | 941 |
| 6 | 4 | 40 | 922 |
| 7 | 5 | 50 | 904 |
| 8 | 6 | 60 | 886 |
| 9 | 7 | 70 | 868 |
| 10 | 8 | 80 | 851 |
| | ........................ | | |
| | ........................ | | |
| | ........................ | | |
| 41 | 39 | 390 | 455 |
| 42 | 40 | 400 | 446 |
| 43 | 41 | 410 | 437 |
| 44 | 42 | 420 | 428 |
| 45 | 43 | 430 | 419 |
| 46 | 44 | 440 | 411 |
| 47 | 45 | 450 | 403 |
| 48 | 46 | 460 | 395 |
| 49 | 47 | 470 | 387 |
| 50 | 48 | 480 | 379 |
| 51 | 49 | 490 | 372 |
| 52 | 50 | 500 | 364 |

# CORRECTIONS



## Corrections Savoir Sag. 5

### Corrigé Exercice 0

**a)** $u_{n+1} = \boldsymbol{u_n + 0,8}$ **b)** $u_n = u_0 \times q^n = \boldsymbol{1,2 \times 0,5^n}$

**c)** $u_n = -2u_{n-1}$ ou $\boldsymbol{u_{n+1} = -2u_n}$

**d)** $u_n = u_1 + (n-1)R = -5 + 10(n-1) = \boldsymbol{10n - 15}$

**e)** $u_n = \boldsymbol{u_{n-1} - 1}$ **f)** $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 0,7^{n-1} = \boldsymbol{0,7^{n-1}}$

**g)** $u_n = u_0 + nR = \boldsymbol{0,1 + \frac{3}{2}n}$ **h)** $u_{n+1} = \boldsymbol{\frac{1}{3}u_n}$

### Corrigé Exercice 1

**1)** $(u_n)$ : la raison est strictement négative, la suite est **décroissante**

**2)** $(v_n)$ : la raison est strictement positive, la suite est **croissante**

**3)** $(w_n)$ : la raison est nulle, la suite est **stationnaire**

**4)** $(z_n)$ : la raison est strictement positive, la suite est **croissante**

**5)** $(a_n)$ : la raison est strictement négative, la suite est **décroissante**

**6)** $(b_n)$ est arithmétique de raison $-102$, strictement négative : la suite est **décroissante**

### Corrigé Exercice 2

**1)** $(s_n) : u_0 \geq 0 \;\; et \;\; q > 1$
$\Rightarrow$ La suite est **croissante**

**2)** $(b_n) : b_0 < 0 \;\; et \;\; q > 1$
$\Rightarrow$ La suite est **décroissante**

**3)** $(w_n) : w_0 \leq 0 \;\; et \;\; 0 < q < 1$
$\Rightarrow$ La suite est **croissante**

**4)** $(t_n) : q < 0$
$\Rightarrow$ La suite n'est **pas monotone**

**5)** $(e_n) : e_0 < 0 \;\; et \;\; 0 < q < 1$
$\Rightarrow$ La suite est **croissante**

**6)** $(a_n) : q < 0$
$\Rightarrow$ La suite n'est **pas monotone**

**7)** $(U_n) : U_0 \geq 0 \;\; et \;\; 0 < q < 1$
$\Rightarrow$ La suite est **décroissante**

**8)** $(d_n) : d_3 < 0 \;\; et \;\; q > 1$
$\Rightarrow$ La suite est **décroissante**

**9)** $(v_n)$ est géométrique de raison 0,7 et 1[er] terme $v_0 = 1200$, donc $v_0 \geq 0 \;\; et \;\; 0 < q < 1$
$\Rightarrow$ La suite est **décroissante**

**10)** $(C_n) : q = 1$ $\Rightarrow$ La suite est **stationnaire**

### Corrigé Exercice 3

**1**. Augmenter de 3,7 % revient à multiplier chaque année par 1,037.
On a donc $\boldsymbol{u_{n+1} = 1,037u_n}$ : la suite est **géométrique** de **raison $\boldsymbol{1,037}$**

**2**. $u_n = u_0 \times q^n = \boldsymbol{187 \times 1,037^n}$

**3**. On a $u_0 \geq 0$ et $q > 1$ donc la suite $(u_n)$ est **croissante**

**4**. L'année 2019 correspond au rang $n = 19$. On a $u_{19} = \boldsymbol{187 \times 1,037^{19}} \simeq 373$
Selon cette estimation, la production mondiale de plastique en 2019 serait **d'environ 373 millions de tonnes**

## Corrigé Exercice 4

**• $1^{er}$ cas**

**Méthode 1**

a) $v_n = f(n)$ avec $f(x) = (x+3)^2$
Or, comme fonction PSD, la fonction $f$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,-3[$ et croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$, donc en particulier $f$ est **croissante** sur $[0\,;\,+\infty[$ $\Rightarrow v_n$ est **croissante**

*b)* $s_n = f(n)$ avec $f(x) = -2x^3$
On a $f'(x) = -6x^2$ et donc $f'$ est négative sur $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ la fonction $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc en particulier $f$ est **décroissante** sur $[0\,;\,+\infty[$
$\Rightarrow s_n$ est **décroissante**

**Méthode 2**

a) 
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -2(n+1)^2+1 \\ &= -2(n^2+2n+1)+1 \\ &= -2n^2-4n-2+1 \\ &= -2n^2-4n-1 \end{aligned}$$
Donc 
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= -2n^2-4n-1-(-2n^2+1) \\ &= -2n^2-4n-1+2n^2-1 \\ &= -4n-2 \end{aligned}$$
Or pour $n \geq 0$, on a $-4n \leq 0 \;\Rightarrow\; -4n-2<0$
Donc $u_{n+1}-u_n<0 \Rightarrow$ La suite $u$ est **strictement décroissante**

b) $w_{n+1} = \frac{1}{n+1+1} = \frac{1}{n+2}$
Donc 
$$\begin{aligned} w_{n+1}-w_n &= \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$
Or on connait le signe de $(n+1)(n+2)$ : il s'agit d'un PSD de racines $-1$ et $-2$ et positif à l'extérieur des racines, donc

| $n$ | $0$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $-1$ | $-$ |
| $(n+1)(n+2)$ | $+$ |
| $w_{n+1}-w_n$ | $-$ |

On a $w_{n+1}-w_n<0$ donc la suite $(w_n)$ est **strictement décroissante**

**• $2^{ème}$ cas**

**Méthode 1**

a) $a_{n+1}-a_n = 3n \geq 0 \quad \Rightarrow a_n$ *est* ***croissante***

b) $b_{n+1}-b_n = n^2-9$
Or $n^2-9$ est positif à l'extérieur de ses racines, donc sur $\mathbb{N}$, positif pour $n \geq 3$
$\Rightarrow b_n$ *est* ***croissante*** ***<u>à partir du rang 3</u>***

**Méthode 2**

a) Pour $n \geq 0$, on a bien $\frac{1}{n+5} > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n+6}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+6}}{\frac{1}{n+5}} = \frac{n+5}{n+6}$$
Or, comme $n+5<n+6$, on a $\frac{n+5}{n+6}<1$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1 \Rightarrow$ La suite $(u_n)$ est **décroissante**

b) Pour $n \geq 0$, on a bien $\frac{2}{5^n} > 0$ et $w_{n+1} = \frac{2}{5^{n+1}}$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{2}{5^{n+1}}}{\frac{2}{5^n}} = \frac{5^n}{5^{n+1}} = \frac{5^n}{5\times 5^n} = \frac{1}{5} < 1$$

$\Rightarrow$ La suite $(w_n)$ est **décroissante**

## Corrigé Exercice 5

**1.** $u_3 = \frac{8\times 3-4}{3+1} = \frac{20}{4} = \mathbf{5}$

**2. a.** Pour $x^2+2x+1$ on a $\Delta = 0$ et $x_0 = -1$ Donc le PSD est positif partout et nul en $x=-1$.
La dérivée $f'$ est donc strictement positive pour $x \geq 0$, et la fonction $\boldsymbol{f}$ **est strictement croissante** pour $x \geq 0$

**b.** On a $u_n = f(n)$ avec la fonction $f$ définie au (a), qui est croissante. Donc $(\boldsymbol{u_n})$ **est strictement croissante.**

# Corrections Savoir Sag. 6

## Corrigé Exercice 6

**1)** Suite de raison positive, donc croissante
⇒ On cherche à résoudre $v_n \geq 500$
On a $v_n = 2 + 10n \;\Rightarrow\; 2 + 10n \geq 500$
$\Leftrightarrow\; 10n \geq 498 \;\Leftrightarrow\; n \geq 49{,}8$
**À partir du rang 50, la suite passe au-delà de 500**

**2)** Suite de raison positive, donc croissante
⇒ On cherche à résoudre $a_n \geq 10$
On a $a_n = 0 + \frac{2}{5}n \;\Rightarrow\; \frac{2n}{5} \geq 10 \;\Leftrightarrow\; 2n \geq 50$
$\Leftrightarrow\; n \geq 25$
**À partir du rang 525, la suite passe au-delà de 10**

**3)** Suite de raison négative, donc décroissante
⇒ On cherche à résoudre $w_n \leq -60$
Attention, on commence à 1
On a $w_n = 12 - 4(n-1) = 16 - 4n$
$\Rightarrow\; 16 - 4n \leq -60 \;\Leftrightarrow\; -4n \leq -76 \;\Leftrightarrow\; n \geq 19$
**À partir du rang 19, la suite passe au-delà de −60**

**4)** Suite de raison négative, donc décroissante
⇒ On cherche à résoudre $c_n \leq -4$.
Attention, on commence à 1
On a $c_n = 0{,}3 - 0{,}1(n-1) = 0{,}4 - 0{,}1n$
$0{,}4 - 0{,}1n \leq -4 \;\Leftrightarrow\; -0{,}1n \leq -4{,}4 \;\Leftrightarrow\; n \geq 44$
**À partir du rang 144, la suite passe au-delà de −64**

## Corrigé Exercice 7

**1)** raison positive $q > 1$ et 1er terme positif
⇒ suite croissante ⇒ On résout $u_n \geq 600$
à la calculatrice, on trouve : $u_4 = 500 \;\; et \;\; u_5 = 2\,500$
**⇒ à partir de $\boldsymbol{n = 5}$, on a $\boldsymbol{u_n \geq 600}$**

**2)** raison positive $q > 1$ et 1er terme négatif
⇒ suite décroissante ⇒ On résout $b_n \leq -1000$
à la calculatrice, on a : $b_3 = -320 \;\; et \;\; b_4 = -1280$
**⇒ à partir de $\boldsymbol{n = 4}$, on a $\boldsymbol{b_n \leq -1000}$**

**3)** raison positive $0 < q < 1$ et 1er terme positif
⇒ suite décroissante ⇒ On résout $s_n \leq 50$
à la calculatrice, on trouve : $s_6 \simeq 51{,}3 \;\; et \;\; s_7 \simeq 38{,}4$
**⇒ à partir de $\boldsymbol{n = 7}$, on a $\boldsymbol{s_n \leq 50}$**

**4)** Raison négative ⇒ la suite n'est pas monotone ! elle passe successivement des + aux −… chercher à partir de quel rang elle dépasse un nombre n'a pas de sens, car au rang d'après ce ne sera plus vrai !

## Corrigé Exercice 8

**1.** $u_1 = 6000 + 750 = \mathbf{6750}$ et $u_2 = 6750 + 750 = \mathbf{7500}$
**En 2020 il aurait 6 750 abonnés et 7 500 abonnés en 2021.**

**2.** $u_{n+1} = u_n + 750$

**3.** La suite $(u_n)$ est arithmétique de raison 750

**4.** $u_n = u_0 + nR = \mathbf{6\,000 + 750}\boldsymbol{n}$.

**5.** On cherche à résoudre $u_n \geq 3 \times 6\,000 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{u_n \geq 18\,000}$
$\Leftrightarrow\; 6\,000 + 750n \geq 18\,000 \;\Leftrightarrow\; 750n > 12\,000 \;\Leftrightarrow\; n \geq \frac{12000}{750} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{n \geq 16}$
Le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019 au bout de 16 ans, soit **en 2035**

## Corrigé Exercice 9

**1. a.** D'une année à l'autre, baisser de 14% revient à multiplier par $\left(1 - \frac{14}{100}\right) = 0{,}86$.
On a donc $P_{n+1} = 0{,}86P_n$ : la suite est géométrique de raison 0,86

**b.** L'année 2010 correspond à $n = 8$. Or on a $P_n = P_0 \times q^n = 10\,500 \times 0{,}86^n$
Donc $P_8 = 10\,500 \times 0{,}86^8 \simeq \mathbf{3\,142} \;\Rightarrow\;$ **La voiture valait environ 3142 € en 2010**

**2.** $(P_n)$ est une suite géométrique de 1er terme positif et de raison $0 < q < 1$, elle est donc décroissante.
On cherche à résoudre $\boldsymbol{P_n \leq 1\,500}$. À la calculatrice, on trouve : $P_{12} \simeq 1\,719$ et $P_{13} \simeq 1\,478$
On a $P_n \leq 1\,500$ pour $n \geq 13$ ⇒ **La voiture de Camille vaudra moins de 1 500 € à partir de 2015**

# Corrections Savoir Sag. 7

## Corrigé Exercice 10

**1)** La suite $(u_n)$ semble converger vers une limite $l \simeq 1{,}732$ ...
La suite $(v_n)$ semble diverger vers $+\infty$
La suite $(w_n)$ ne semble pas avoir de limite, car elle alterne les termes positif et négatif.

**2)** La suite $(a_n)$ ne semble pas avoir de limite, car elle alterne les termes positif et négatif.
La suite $(b_n)$ semble converger vers une limite $l \simeq 1$ ...
La suite $(c_n)$ semble diverger vers $-\infty$

## Corrigé Exercice 11

| **1)** | $(u_n) : r > 0 \Rightarrow$ | $(a_n) : r < 0$ | $(b_n) : r > 0$ | $(v_n) : r < 0$ |
|---|---|---|---|---|
| Limite | $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ |

| **2)** | $(a_n) :\ r = 4 > 0$ | $(b_n): r = -\frac{10}{3} < 0$ | $(v_n): r = -0{,}001 < 0$ | $(t_n): r = 2{,}3 > 0$ |
|---|---|---|---|---|
| Limite | $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ |

| **3)** | $(a_n) :\ r = 9 > 0$ | $(b_n) :\ r = 2 > 0$ | $(c_n) :\ r = -\dfrac{2}{3} < 0$ | $(d_n): r = \dfrac{1}{6} > 0$ |
|---|---|---|---|---|
| Limite | $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty$ |

## Corrigé Exercice 12

| **1)** | $(u_n)$ : 1er terme positif, $q > 1$ $\Rightarrow$ croissante | $(a_n)$ : 1er terme positif, $0 < q < 1$ $\Rightarrow$ décroissante | $(b_n)$ : 1er terme négatif, $q > 1$ $\Rightarrow$ décroissante | $(v_n)$ : 1er terme négatif, $0 < q < 1$ $\Rightarrow$ croissante |
|---|---|---|---|---|
| Limite | $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ | $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ |

| **2)** | $(a_n)$ : 1er terme positif, $q = 3 > 1$ $\Rightarrow$ croissante | $(b_n)$ : 1er terme négatif, $q = \frac{7}{3} > 1$ $\Rightarrow$ décroissante | $(v_n)$ : 1er terme positif, $q = 0{,}4$ $0 < q < 1$ $\Rightarrow$ décroissante | $(t_n)$ : 1er terme positif, $q = -\frac{1}{3} < 0$ $\Rightarrow$ non monotone |
|---|---|---|---|---|
| Limite | $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ | $(t_n)$ n'a pas de limite |

| **3)** | $(a_n)$ : 1er terme positif, $q = 9 > 1$ $\Rightarrow$ croissante | $(b_n)$ : 1er terme négatif, $q = 1{,}65 > 1$ $\Rightarrow$ décroissante | $(c_n)$ : 1er terme positif, $q = -0{,}9 < 0$ $\Rightarrow$ non monotone | $(d_n)$ : 1er terme positif, $q = 0{,}78$ donc $0 < q < 1$ $\Rightarrow$ décroissante |
|---|---|---|---|---|
| Limite | $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ | $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ | $(c_n)$ n'a pas de limite | $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ |

## Corrigé Exercice 13

**a)** Diminuer de 25 % revient à multiplier par 0,75
$\boldsymbol{R_{n+1} = 0,75R_n} \Rightarrow$ suite géométrique de raison 0,75 et de 1er terme $R_0 = 2$

**b)** $R_n = R_0 \times q^n = \mathbf{2 \times 0,75^{\boldsymbol{n}}}$

**c)** Le 1er terme est positif et la raison est inférieure à 1 ⇒ La suite est décroissante.
Interprétation : **La quantité de médicament dans le sang diminue.**

**d)** Le 1er terme est positif et la raison est comprise entre 0 et 1 ⇒ $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$
Interprétation : **Au bout d'un temps infini, le médicament finit par disparaître du sang.**

## Corrigé Exercice 14

**1)** Diminuer de 15% revient à multiplier par 0,85
$\boldsymbol{V_{n+1} = 0,85V_n} \;\Rightarrow$ *La* suite $(V_n)$ est une suite géométrique de raison 0,85 et de 1er terme $V_0 = 220\,000$

**2)** $V_n = V_0 \times q^n = \mathbf{220\,000 \times 0,85^{\boldsymbol{n}}}$

**3)** L'année 2015 correspond au rang 5 ⇒ $V_5 = 220\,000 \times 0,85^5 \;\simeq\; 97\,615$
$\Rightarrow$ **En 2015, la machine aura une valeur estimée de 97 615 €**

**4)** La suite est de 1er terme positif, et de raison positive inférieure à 1 ⇒ elle est **décroissante**
Interprétation : **La valeur estimée de la machine diminue au fil des ans**
On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = 0$
Interprétation **: Au bout d'un temps infini, elle ne vaudra plus rien** (il est réaliste de penser qu'elle sera cassée bien avant…)

## Corrigé Exercice 15

### Corrigé Partie A

**1.** Entre deux termes consécutifs, on soustrait toujours le même nombre 9,3. $(u_n)$ est donc une suite arithmétique de raison $r\ = -\ 9{,}3$.

**2.** $u_n = 547 - 9{,}3n.$

**3.** La suite est décroissante, car sa raison est négative. On résout l'inéquation :
$u_n < 100 \;\Leftrightarrow\; 547 - 9{,}3n < 100 \;\Leftrightarrow\; -9{,}3n > -447 \;\Leftrightarrow\; n > \frac{-447}{-9{,}3}$ avec $\frac{-447}{-9{,}3} \simeq 48{,}1$ on a $n \geq 49$

**C'est donc à partir de 2055 que les émissions de gaz à effet de serre en France deviendront inférieures à cent millions de tonnes selon ce modèle.**

### Corrigé Partie B

Diminuer de 3,1% revient à multiplier par $1 - \frac{3{,}1}{100} = 0{,}969 \Rightarrow$ la suite est une suite géométrique, de raison $q = 0{,}969$ et de 1er terme $v_0 = 547$
On a $v_0 \geq 0$ et $0 < q < 1$ : la suite $(v_n)$ est donc décroissante.
On cherche à résoudre $v_n \leq 100$. Or on remarque que : $u_{53} \simeq 103{,}07$ et $u_{54} \simeq 99{,}88$.

**C'est donc à partir de 2060 que les émissions de gaz à effet de serre en France deviendront inférieures à cent millions de tonnes selon ce modèle.**

**Corrigé Partie C**

**a)** ($v_n$) est une suite géométrique de raison $q$ = 0,969 inférieure à 1. Sa limite est donc : $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} v_n = 0}$

**b)** ($u_n$) est une suite arithmétique de raison $r$ = – 9,3 négative. Sa limite est donc : $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n} = -\infty$
Cela n'est pas cohérent avec la situation, car les émissions de gaz à effet de serre ne peuvent pas devenir négatives ! Avec ce modèle, **les émissions s'annulent totalement au bout d'un certain nombre d'années, et le modèle n'est plus valide au-delà de cette période.**

## Corrigé Exercice 16

Chaque partie est chronométrée et dure 45 minutes. Au bout des 45 minutes, la partie s'arrête et le joueur a gagné si le nombre de pions blancs gagnés est supérieur ou égal au nombre de pions noirs du sac.

**1.** D'un terme à l'autre, on ajoute 10 : on a $u_{n+1} = u_n + 10$. Il s'agit d'une suite **arithmétique de raison 10**
Alors $u_n = u_0 + nR = 0 + 10n = \boldsymbol{10n}$

**2. a.** Au bout d'1 minute, Lucas a perdu $\frac{2}{100} \times 1\,000 = 20$ pions noirs. Il lui en reste $v_1 = 1\,000 - 20 = \boldsymbol{980}$

**b.** Baisser de 2% d'un terme à l'autre revient à multiplier par $1 - \frac{2}{100} = 0{,}98$, donc $v_{n+1} = 0{,}98 v_n$
La suite $(v_n)$est **géométrique** de raison 0,98 et on a $v_n = v_0 \times q^n = \boldsymbol{1000 \times 0{,}98^n}$

**3.** Lucas gagne la partie quand $u_n \geq v_n$.
La suite arithmétique $(u_n)$ est croissante, car sa raison est positive, et la suite géométrique $(v_n)$ est décroissante, car son 1er terme et positif, mais que sa raison est comprise entre 0 et 1.

D'après les résultats du tableur, on remarque que $u_n \geq v_n$ à partir de $n = 45$.
**Donc oui, Lucas pourra gagner la partie au bout de 45 minutes de jeu**