

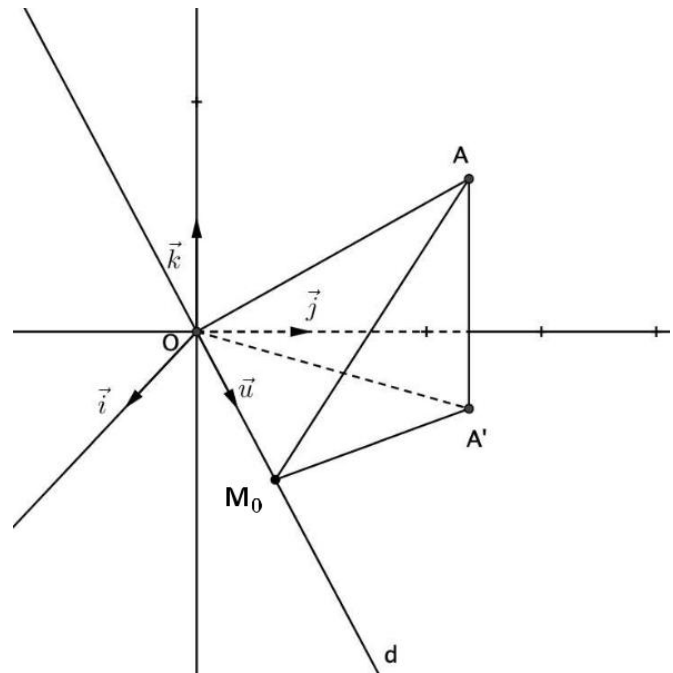
10. Métropole - juin 2021

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(1; 3; 2)$
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- la droite d passant par O et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



- Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
- Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d , le point M ayant pour coordonnées $(t; t; 0)$.
 - Démontrer que la longueur AM vérifie la relation suivante :

$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$$
 - Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2; 2; 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
- Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
- On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1; 3; 0)$.
 - Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O .
 - Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}Bh$, où B est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.