Corrigé Sujet n°2

Corrigé Exercice 5

1. a. On a $B(1;1;0)$; $F(1;1;1)$ et $G(1;0;1)$ donc $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}1-1\\0-1\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0 - 1 + 1 = 0$ donc $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BG}$

et $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$ donc $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BEG), **il est donc normal à ce plan.**

b. Le plan $\mathcal{P}$ a une équation du type $x + y + z + d = 0$

et comme $I \in \mathcal{P}$, on a $x_I + y_I + z_I + d = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{3}{2}$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $\boldsymbol{x + y + z - \frac{3}{2} = 0}$

2. Le milieu de $[AE]$ a pour coordonnées $\left(\frac{0+0}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right)$ soit $\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$

On a $N \in \mathcal{P}$ et $N \in [AE]$

Or $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ donc la droite (AE) passant par $A(0;1;0)$ a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Les coordonnées de N vérifient aussi l'équation de $\mathcal{P}$ donc $0 + 1 + t - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Le point N a donc pour coordonnées $\boldsymbol{N\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)}$ **c'est donc bien le milieu du segment** $[\boldsymbol{AE}]$

<u>Remarque</u> : on peut aussi passer par une démonstration sans calcul, vu que les plans $\mathcal{P}$ et (BGE) sont parallèles, donc que leurs intersections avec la face ABEF sont parallèles, d'où $(BE)//(IN)$. Comme I est le milieu de [AB], par la réciproque du théorème de la droite des milieux, N est bien le milieu de [AE].

3. a. Or $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

donc la droite (HB) passant par $H(0;0;1)$ a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Remarque : si vous choisissez le point B, cela vous donne $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 + t' \\ z = -t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}$

b. On résout $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ x + y + z - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ t + t + 1 - t - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc le plan et la droite sont sécants et on a $\boldsymbol{T\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)}$

4. Une base du tétraèdre est le triangle EFB, rectangle en F, son aire est donc $\mathcal{A}(EFB) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

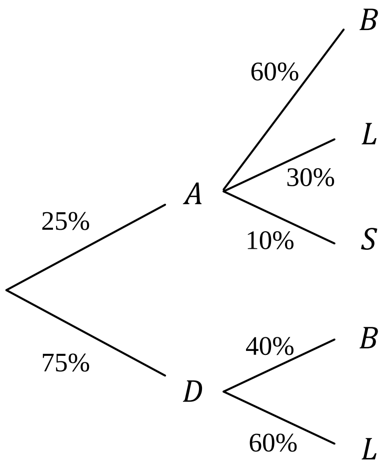
La hauteur correspondante dans le tétraèdre est le côté $[FG]$, donc le volume est $\mathcal{V}(FEGB) = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

Corrigé Exercice 6

1. a. L'énoncé donne : $p(A) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$; $p_A(B) = 0{,}6 = \frac{3}{5}$; $p_A(L) = 0{,}3 = \frac{3}{10}$ et $p_D(B) = 0{,}4 = \frac{2}{5}$.

On demande ici : $p(A \cap L) = p(A)p_A(L) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{40}$.

Il y a donc 3 chances sur 40 que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.



b. On a : $p(L) = p(A \cap L) + p(D \cap L) = \frac{3}{40} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{40}$. CQFD.

c. On demande ici : $p_L(D) = \frac{p(D \cap L)}{p(L)} = \frac{9}{20} \times \frac{40}{21} = \frac{6}{7}$. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, il y a donc 6 chances sur 7 que celle-ci soit dorée.

2. Toutes les médailles qui représentent le château de Saumur sont argentées !
Il y a donc 100% de chances qu'une médaille représentant le château de Saumur soit argentée : $p_S(A) = 1$ (on a en effet $p(S) = p(A \cap S)$).

3. On effectue 10 expériences identiques et indépendantes où il n'y a que 2 issues possibles : le succès (obtenir une médaille dorée avec une probabilité de 0,75) ou l'échec. La variable aléatoire X qui compte le nombre de médailles dorées suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}75$.
On a alors $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \simeq 0{,}98$
Il y a environ 98 % de chances d'avoir au moins 5 médailles dorées

Corrigé Exercice 7

Partie I

1. On a $h(x) = \frac{1+\ln(x)}{x} = (1 + \ln(x)) \times \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par produit de limites $\lim\limits_{x \to 0^+} \boldsymbol{h(x) = -\infty}$

2. On a $h(x) = \frac{1+\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{h(x) = 0}$

3. $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

4. $1 - \ln(x) \geq 0 \iff 1 \geq \ln x \iff e \geq x$

On a donc, avec $h(e) = 1 + \frac{\ln(e)}{e} = 1 + \frac{1}{e}$

x	0		e		$+\infty$
$1 - \ln(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$	$\|$	$+$	
$h'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{e}$	$\searrow$	0

5. Sur $[e;\ +\infty[$, la fonction h est strictement positive, donc l'équation $h(x) = 0$ n'y a pas de solution.
Sut $]0; e]$, la fonction h est continue et croissante, et $0 \in \left]-\infty; 1 + \frac{1}{e}\right]$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ y admet une unique solution α .
L'équation $h(x) = 0$ n'a bien qu'une seule solution dans $]0\ ;\ +\infty[$.

On a $h(0{,}5) \simeq -0{,}39$ et $h(0{,}6) \simeq 0{,}149$ donc on a bien : $\mathbf{0{,}5} < \alpha < \mathbf{0{,}6}$.

Partie II

1. On a $g'(x) = \frac{1}{x}$ donc la tangente D_a a pour coefficient directeur $g'(a) = \frac{1}{a}$.

2. Ona $f'(x) = x \times \frac{1}{x} + \ln(x) - 1 = \ln x$ donc la tangente T_a a pour coefficient directeur $f'(a) = \ln(a)$.

3. On a le produit des coefficients directeurs $mm' = \frac{1}{a} \times \ln(a)$
Donc les droites T_a et $D_a$sont perpendiculaires quand :

$$mm' = -1 \iff \frac{\ln(a)}{a} = -1 \iff 1 + \frac{\ln(a)}{a} = 0 \iff h(a) = 0$$

où h est la fonction de la partie I.
Or on a montré qu'il n'y a qu'une seule solution à l'équation $h(x) = 0$, c'est α défini dans la partie I.

Corrigé Exercice 8

1. $u_0 = 3$. On doit avoir $\begin{cases} u_0 + u_1 = u_0 \times u_1 \\ u_0 + u_1 + u_2 = u_0 \times u_1 \times u_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 + u_1 = 3u_1 \\ 3 + u_1 + u_2 = 3u_1 \times u_2 \end{cases}$

Or $3 + u_1 = 3u_1 \iff 3u_1 - u_1 = 3 \iff u_1 = \mathbf{\frac{3}{2}}$
Et $3 + u_1 + u_2 = 3u_1 \times u_2 \iff 3 + \frac{3}{2} + u_2 = 3 \times \frac{3}{2} \times u_2 \iff \frac{9}{2}u_2 - u_2 = \frac{9}{2} \iff u_2 = \frac{9}{2} \div \frac{7}{2} = \mathbf{\frac{9}{7}}$

2. a. On a, par définition, pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) + u_n = \boldsymbol{s_n + u_n}$
et, comme $s_n = u_0 + (u_1 + \cdots + u_{n-1})$
avec $u_0 > 1$ et la somme de terme strictement positifs $u_1 + \cdots + u_{n-1} > 0$, **on a bien** $\boldsymbol{s_n} > 1$

b. On a aussi, pour tout $n > 0$, $s_{n+1} = S_n \times u_n$
Donc : $S_n \times u_n = S_n + u_n \iff S_n \times u_n - u_n = S_n \iff u_n(S_n - 1) = S_n$
Et comme $S_n > 1$ on a bien $S_n - 1 \neq 0$ donc $\boldsymbol{u_n = \frac{S_n}{S_n - 1}}$

c. Comme $s_n > 1$, on a $s_n > s_n - 1 > 0$ et par conséquent, pour tout $n > 0$, on a bien $\frac{s_n}{s_n - 1} > 1$
et par suite $\boldsymbol{u_n > 1}$

3. a.

```
s = u
for i in range(n) :
      u = s/(s-1)
      s = s+u
print(u)
```

b. On peut conjecturer que la suite (u_n) est **convergente vers 1**

4. a. s_n est la somme de n termes tous strictement supérieurs à 1 (question 2c), donc $s_n > 1 + 1 + \cdots 1$
On a bien, pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

b. Comme $s_n > n$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, on a, d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{s_n} = +\infty$
Or $u_n = \frac{S_n}{S_n - 1} = \frac{s_n}{s_n\left(1 - \frac{1}{s_n}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{s_n}}$ et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{s_n}\right) = 0$, on a alors $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0} = 1}$