Savoir Vps. 4 : Vecteurs colinéaires

Entraînement n°1

1) Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne les vecteurs : $\vec{u}\left(\frac{4}{3}\ ;\ -3\right)$, $\vec{v}\left(\frac{3}{2};\ -\frac{2}{3}\right)$ et $\vec{w}\left(-2\ ;\ \frac{9}{2}\right)$

a. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, écrire leur relation de colinéarité (méthode 1)

b. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, écrire leur relation de colinéarité (méthode 2, différente de celle de la question a).

2) On se place dans la base $\left(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MP}\right)$. On donne les vecteurs : $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{MO}-2\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MO}+4\overrightarrow{PO}$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils colinéaires ? *(Détailler la démarche)*

3) Dans un repère (O,I,J) on donne les vecteurs : $\vec{a}\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}-8\\-m\end{pmatrix}$ où m est un nombre réel.

Déterminer pour quelle valeur de m les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ seraient colinéaires.

Entraînement n°2

1) Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne les vecteurs : $\vec{a}(-10;25)$, $\vec{b}(8;\ -20)$ et $\vec{c}(6;\ -16)$

a. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, écrire leur relation de colinéarité (méthode 1)

b. Les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, écrire leur relation de colinéarité (méthode 2, différente de celle de la question a).

2) On se place dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)$. On donne les vecteurs : $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{RS}=-4\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}$
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont-ils colinéaires ? *(Détailler la démarche)*

3) Dans un repère (O,I,J) on donne les vecteurs : $\vec{u}(2;\ -12)$ et $\vec{w}(t;4)$, où t est un nombre réel.
Déterminer pour quelle valeur de t les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Entraînement n°3

1) Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne les vecteurs : $\vec{u}\left(-1\ ;\frac{9}{5}\right)$, $\vec{v}(6\ ;\ -15)$ et $\vec{w}\left(-\frac{4}{5},2\right)$

a. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, écrire leur relation de colinéarité (méthode 1)

b. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, écrire leur relation de colinéarité (méthode 2, différente de celle de la question a).

2) On se place dans la base $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)$. On donne les vecteurs : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont-ils colinéaires ? *(Détailler la démarche)*

3) Dans un repère (O, I, J) on donne les vecteurs : $\vec{a}(m-4\ ;\ -2)$ et $\vec{b}(9\ ;\ 3)$, où *m* est un nombre réel.
Déterminer m pour que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient colinéaires.

Savoir Vps. 4 : Corrections

Corrigé Entraînement n°1

1) a. $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{4}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ et $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = -3 \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{2}$ donc $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} \neq \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont **pas colinéaires**

b. $Det\,(\vec{u};\vec{w}) = \frac{4}{3} \times \frac{9}{2} - (-3) \times (-2) = 6 - 6 = 0$ $\Rightarrow$ **$\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et $\vec{u} = \frac{-3}{-2}\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{w}$**

2) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MO} + 4\overrightarrow{PO} = 2\overrightarrow{MO} + 4\overrightarrow{PM} + 4\overrightarrow{MO} = 6\overrightarrow{MO} - 4\overrightarrow{MP}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$
On a $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ Les vecteurs **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires**

3) $Det(\vec{a}\,;\vec{b}\,) = -m^2 - (-16) = 16 - m^2$
Donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ colinéaires $\Leftrightarrow Det(\vec{a};\,\vec{b}) = 0 \;\Leftrightarrow\; 16 - m^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 16 = m^2 \;\Leftrightarrow\; m = 4$ ou $m = -4$
Les vecteurs $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ sont colinéaires si et seulement si $m \in \{-4; 4\}$

Corrigé Entraînement n°2

1) a. $\frac{x_{\vec{a}}}{x_{\vec{b}}} = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}$ et $\frac{y_{\vec{a}}}{y_{\vec{b}}} = \frac{25}{-20} = -\frac{5}{4}$ donc $\frac{x_{\vec{a}}}{x_{\vec{b}}} = \frac{y_{\vec{a}}}{y_{\vec{b}}}$ les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **colinéaires et $\vec{a} = -\frac{5}{4}\vec{b}$**
(ou $\vec{b} = -\frac{4}{5}\vec{a}$)

b. $Det\,(\vec{v};\vec{w}) = 8 \times (-16) - (-20) \times 6 = -128 + 120 = -8 \neq 0$ $\Rightarrow$ **$\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires .**

2) On a $\overrightarrow{MN}\left(\frac{1}{2}\,;\,-\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{RS} = -4\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AE} + 6\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{RS}(2;6)$
$Det(\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{RS}) = \frac{1}{2} \times 6 - \left(-\frac{3}{2}\right) \times 2 = 3 + 3 = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Les vecteurs **$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{RS}$ ne sont pas colinéaires**

3) $Det(\vec{u}\,;\vec{v}\,) = 8 + 12t$
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow Det(\vec{u}\,;\vec{v}\,) = 0 \;\Leftrightarrow\; 8 + 12t = 0 \;\Leftrightarrow\; 5 = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$
Les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $t = -\frac{2}{3}$

Corrigé Entraînement n°3

1) a. $\frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}} = \frac{6}{-1} = -6$ et $\frac{y_{\vec{v}}}{y_{\vec{u}}} = \frac{-15}{\frac{9}{5}} = -\frac{75}{9} = -\frac{25}{3}$ donc $\frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}} \neq \frac{y_{\vec{v}}}{y_{\vec{u}}}$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas colinéaires**

b. $Det\,(\vec{v};\vec{w}) = 6 \times 20 - (-15) \times (-8) = 120 - 120 = 0$ **⇒** $\boldsymbol{\vec{v}}$ **et** $\boldsymbol{\vec{w}}$ **sont colinéaires et** $\boldsymbol{\vec{v} = -\frac{15}{2}\vec{w}}$

2) On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}$ donc $\overrightarrow{CN}\left(-\frac{3}{4};\ -\frac{5}{4}\right)$

$Det\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{CN}\right) = 3 \times \left(-\frac{5}{4}\right) - 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{15}{4} + \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow$ Les vecteurs $\boldsymbol{\overrightarrow{AM}}$ **et** $\boldsymbol{\overrightarrow{BU}}$ **sont colinéaires**

3) $Det\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,\right) = (m-4) \times 3 + 18 = \ 3m + 6$

Or $\vec{a}$ et $\vec{b}$ colinéaires ⇔ $Det\left(\vec{a};\ \vec{b}\right) = 0 \iff 3m + 6 = 0 \iff m = -2$

Les vecteurs $\vec{a}$ ***et*** $\vec{b}$ **sont colinéaires si et seulement si** $\boldsymbol{m} = -2$