

Entraînement bac - Exponentielles et logarithmes

Exercice n°1 - (Centres étrangers - juin 2021 - Modifié)

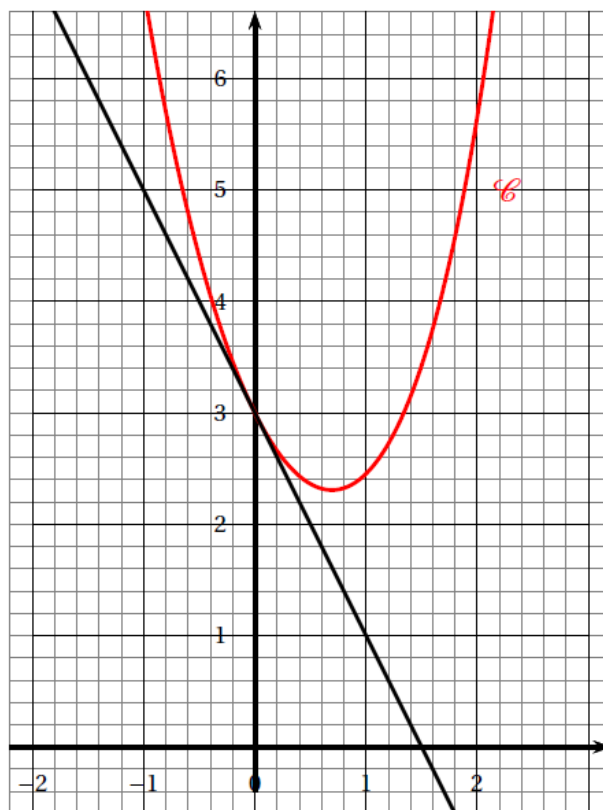
Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + ax + be^{-x}$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.

Dans le plan muni d'un repère d'origine O , on a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}$, représentant la fonction f , et la tangente ($\mathcal{T}$) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En utilisant l'expression de la fonction f , exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b .
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Donner, pour tout réel x , l'expression de $f'(x)$.
 - b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a .
 - c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a , puis en déduire l'expression de $f(x)$.



Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x + 2e^{-x}$

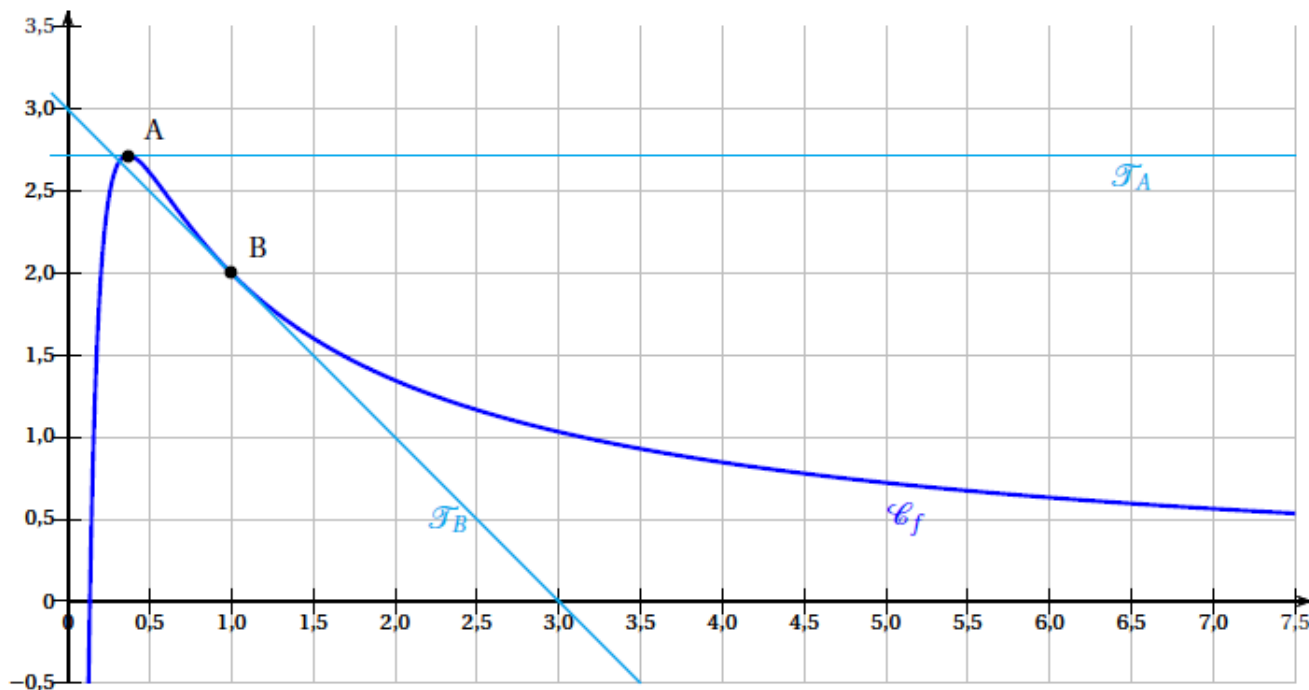
1. Vérifier que pour tout réel x , on a : $e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$
2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x .
3. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$

Exercice n° 2 - (Sujet « 0 » - 2020)

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$;
- la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}; e\right)$
- la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1; 2)$.

La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 3)$.



On note f' la fonction dérivée de f .

PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$
2. En déduire une équation de la droite $\mathcal{T}_B$.

PARTIE II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2+\ln x}{x}$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0 ; \infty[$, $f'(x) = \frac{-1-\ln x}{x^2}$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f . On admet que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1+2\ln x}{x^3}$
Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice n°3 - (Amérique du Nord juin 21)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b , $(e^{a+b})^2 = e^{2a} + e^{2b}$

Affirmation 2 : Dans le plan muni d'un repère, la tangente au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 + (3 - x)e^x$ admet pour équation réduite $y = 2x + 1$.

Affirmation 3 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = 0$

Affirmation 4 : L'équation $1 - x + e^{-x} = 0$ admet une seule solution appartenant à l'intervalle $[0; 2]$.

Affirmation 5 : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 5x + e^x$ est convexe.

Exercice n°4 - (Métropole - mars 21)

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0; +\infty[$.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1)$

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa dérivée.

Démontrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0; +\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f .

Ainsi, on a : $F' = f$.

On note $\mathcal{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0; +\infty[$.

2. La courbe $\mathcal{C}_F$ représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.