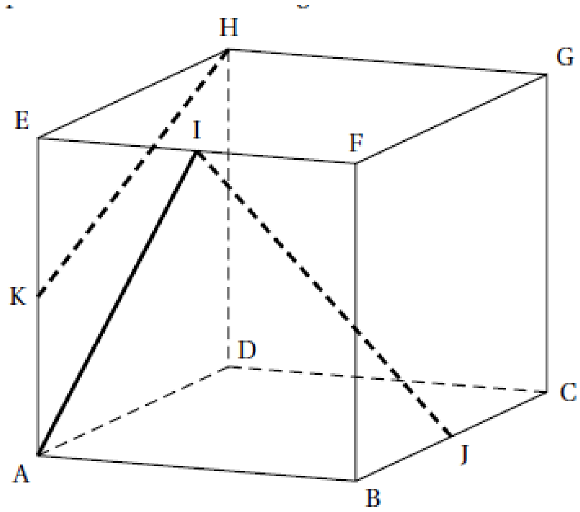
1^er sujet

Exercice 1



On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].

1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A;\ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

2. a. Donner les coordonnées des points I et J.

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

3. a. Donner une représentation paramétrique du plan (IJA)

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (KG)

4. On considère les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 4 + t' \\ y = 1 + t' \\ z = 8 + 2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles? Justifier votre réponse.

Exercice 2

Au 1^er janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :

- 25 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 12.$$

Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

1. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1^er mars 2017.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 48$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

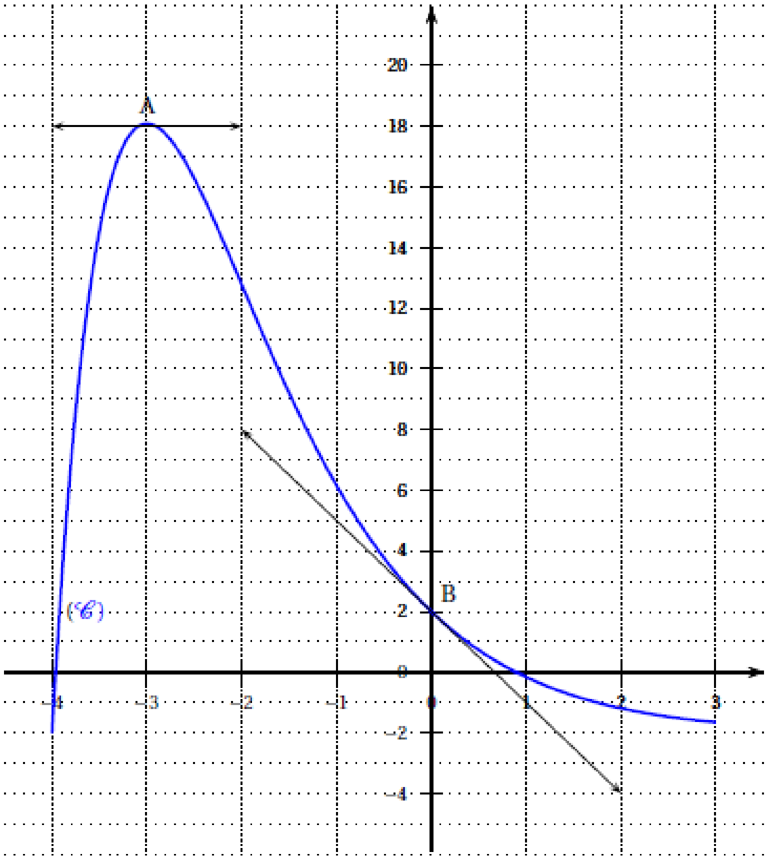
b. Préciser v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 852 \times 0{,}75^n + 48$.

3. La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100. Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne ? Si oui, au bout de combien de mois ?

4. Si rien ne change et que l'évolution reste la même, le nombre d'adhérent finira-t-il par se stabiliser ? Justifier.

Exercice 3



La courbe (C) ci-contre représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$.

Les points A d'abscisse -3 et $B(0\ ;\ 2)$ sont sur la courbe (C). Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe (C) respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale.

On note $f\,'$ la fonction dérivée de f .

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. Par lecture graphique, déterminer :

a. $f\,'(-3)$ **b.** $f\,(0)$ et $f\,'(0)$.

2. La fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par :

$f(x) = a + (x + b)e^{-x}$

où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.

a. Calculer $f\,'(x)$ pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$.

b. À l'aide des questions **1. b**. et **2. a**., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant : $\begin{cases} a + b = 2 \\ 1 - b = -3 \end{cases}$

c. Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

Partie B

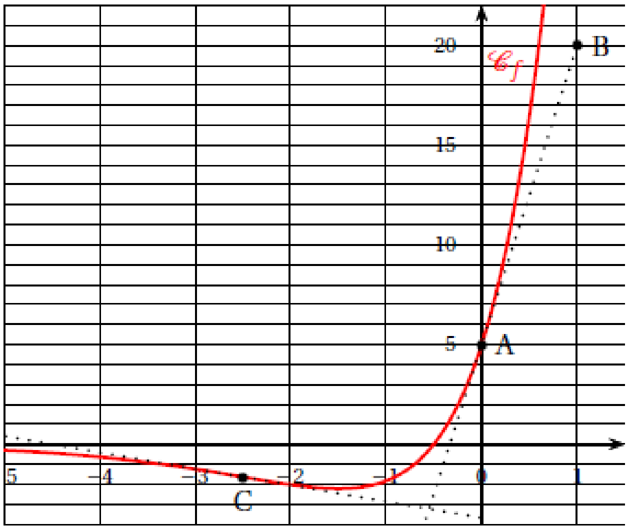
On admet que la fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par : $f(x) = -2 + (x + 4)e^{-x}$.

1. Justifier que, pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$, $f\,'(x) = (-x - 3)e^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4\ ;\ 3]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3\ ;\ 3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

Exercice 4

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



Le graphique ci-contre donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On notera $f\,'$ la fonction dérivée de f .
On donne les points A de coordonnées $(0;\ 5)$ et B de coordonnées $(1;\ 20)$. Le point C est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse $-2{,}5$. La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
Les questions 1 et 2 se rapportent à cette même fonction f .

Question 1. On peut affirmer que :

a. $f\,'(-0{,}5) = 0$

b. si $x\ \in]-\infty;\ -0{,}5[$, alors $f\,'(x) < 0$

c. $f'(0) = 15$

d. la fonction dérivée $f\,'$ ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

Question 2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0{,}5\ ;\ 0)$. On peut affirmer que :

a. $a = 10$ et $b = 5$ **b.** $a = 2{,}5$ et $b = -0{,}5$ **c.** $a = -1{,}5$ et $b = 5$ **d.** $a = 0$ et $b = 5$

Pour les questions 3 et 4 , l'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$
On considère :
• La droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$ et $B(-1\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
• La droite $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Question 3 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathcal{D}'$?

a. $M_1(-1\ ;\ 3\ ;\ -2)$ **b.** $M_2(11\ ;\ -9\ ;\ -22)$ **c.** $M_3(-7\ ;\ 9\ ;\ 2)$ **d.** $M_4(-2\ ;\ 3\ ;\ 4)$

Question 4 : Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles **c.** non coplanaires **d.** confondues