Algorithmes - Correction du Type bac

Corrigé Exercice 1

Partie 1

1. $p(Rh+) = p(A+) + p(O+) + p(B+) + p(AB+) = 0{,}382 + 0{,}365 + 0{,}077 + 0{,}025 = 0{,}849$ **CQFD**

2. $P_{Rh+}(A) = \frac{p(Rh+\cap A)}{p(Rh+)} = \frac{p(A+)}{p(Rh+)} = \frac{0{,}382}{0{,}849} \simeq 0{,}4499 \Rightarrow$ Donc à 0,001 près, on a bien $P_{Rh+}(A) \simeq \mathbf{0{,}450}$

3. $p_{AB}(Rh+) = \frac{p(AB+)}{p(AB)} = \frac{p(AB+)}{p(AB+)+p(AB-)} = \frac{0{,}025}{0{,}025+0{,}004} \simeq 0{,}862$
Si elle sait être AB il y a alors 86 % de chances que son rhésus soit positif

Partie 2

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.

a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}065$

$$p(X = 8) = \binom{50}{8} \times 0{,}065^8 \times (1 - 0{,}065)^{50-8} = 536\,878\,650 \times 0{,}065^8 \times 0{,}935^{42} \simeq 0{,}010$$

Il y a environ 1 chance sur 100 que 8 personnes soient des donneurs universels.

b. $proba(k)$ fait la somme de $i = 0$ jusqu'à $i = k$ des $p(X = i)$. La valeur renvoyée est donc $p(X \leq k)$.
$proba(8)$ renvoie donc $p(X \leq 8)$, c'est-à-dire la probabilité qu'il y ait au maximum 8 donneurs universels parmi les 50 personnes.
On a $p(X \leq 8) \simeq 0{,}995$ **: environ 99,5 % de chances qu'il y ait au plus 8 donneurs universels.**

Pour comprendre l'algorithme :

début	1er tour de boucle	2ème tour de boucle	3ème tour de boucle
$0 \to p$	$0 \to i$ $0 + p(X = 0) \to p$	$1 \to i$ $p(X = 0) + p(X = 1) \to p$	$2 \to i$ $p(X \leq 1) + p(X = 2) \to p$
Dans p :	$p(X = 0)$	$p(X \leq 1)$	$p(X \leq 2)$

…	Dernier tour de boucle	Valeur d'arrêt : $k + 1$
…	$k \to i$ $p(X \leq k - 1) + p(X = k) \to p$	
Dans p :	$p(X \leq k)$	

2. X suit une loi binomiale de paramètres n inconnu et $p = 0{,}065$

$$p(X \geq 1) \geq 0{,}999 \iff 1 - p(X = 0) \geq 0{,}999 \iff 1 - 0{,}935^n \geq 0{,}999 \iff 0{,}935^n \leq 1 - 0{,}999$$

$$\ln(0{,}935^n) \leq \ln(0{,}001) \iff n\ln(0{,}935) \leq \ln(0{,}001) \iff n \geq \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}935)} \quad \text{car } \ln(0{,}935) < 0$$

Avec n entier et $\frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}935)} \simeq 102{,}8 \Rightarrow n \geq 103$

Il faut prendre un échantillon d'au moins 103 personnes pour avoir 99,9 % de chances d'avoir au moins un donneur universel

Corrigé Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ \ u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$$

1. a. $u_1 = u_0 - \ln\left(\frac{u_0}{4}\right) = 8 - \ln 2 \simeq 7{,}307$ et $u_2 \simeq 6{,}704$.

b. Pour comprendre l'algorithme :

début	1er tour de boucle	2ème tour de boucle
$8 \to u$ $0 \to S$	$0 \to i$ $0 + 8 \to S$ $8 - \ln(2) \to u$	$1 \to i$ $8 + 8 - \ln(2) \to S$ $8 - \ln(2) - \ln\left(\dfrac{8 - \ln 2}{4}\right) \to u$
Explications Dans S : Dans u	 u_0 u_1	 $u_0 + u_1$ u_2

…	Dernier tour de boucle	Valeur d'arrêt : $k = 10$
…	$k - 1 = 10 - 1 = 9 \to i$	
Explications Dans S : Dans u	 $u_0 + u_1 + \cdots + u_9$ u_{10}	

L'algorithme calcule la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n)
On a $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 \simeq 58{,}44$

c. La moyenne des k premiers termes c'est $M = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{k-1}}{k} = \frac{S}{k}$
Alors il suffit de modifier la dernière ligne :

```
Def mystere(k) :
        U=8
        S=0
        for i in range(k)
                S=S+u
                U=u-log(u/4)
        return S/k
```