Savoir Vps. 5 : Colinéarité & géométrie

Entraînement n°1

1) On donne les points $F\ (-4\ ;\ 10)\ ;\ G\ (0\ ;\ -5)\ ;\ H\ (-2\ ;\ 4)\ ;\ K\ (-6\ ;\ 14)$ et $L\ (-3\ ;\ 8)$

a. Les droites (FH) et (GK) sont-elles sécantes ? Justifier.

b. Le point F appartient-il à la droite (KL)? Justifier.

2) $ABCD$ est un parallélogramme. On définit les points I et J par : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$

Montrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles. On pourra se placer dans la base $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC})$ par exemple.

Entraînement n°2

1) On donne les points $R\ (3\ ;\ 7)\ ;\ E\ (-4\ ;\ 8)\ ;\ P\ (0\ ;\ 2)\ ;\ U\ (6\ ;\ -7)$ et $S\ (-2\ ;\ -5)$

a. Les droites (RE) et (US) sont-elles parallèles ?

b. Les points E, P et U sont-ils alignés ?

2) $RSTU$ est un parallélogramme. On définit les points A et B par : $\overrightarrow{RA} = 2\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RU}$ et $\overrightarrow{UB} = \overrightarrow{RU} + 3\overrightarrow{UT}$.

On se place dans la base $(\overrightarrow{RS}; \overrightarrow{RU})$

Montrer que les points S, A et B sont alignés et que A est le milieu de $[SB]$

Entraînement n°3

1) On donne les points $M\ (-3\ ;\ 2)\ ;\ A\ (3\ ;\ 6)\ ;\ T\ (5\ ;\ 2)\ ;\ H\ (-4\ ;\ -4)$ et $S\ (2\ ;\ 0)$

a. Les droites (MA) et (TH) sont-elles sécantes ?

b. Les points A, H et S sont-ils alignés ?

2) RST est un triangle non aplati. On choisit la base $\left(\overrightarrow{TS}; \overrightarrow{RS}\right)$

On définit les points V, Z et U par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{SU} = 2\overrightarrow{RT} - 4\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{VZ} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{RS}$

Le quadrilatère $VZRU$ est-il un trapèze de bases (VZ) et (RU) ?

Savoir Vps. 5 : Corrections

Corrigé Entraînement n°1

1) a. On a $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-2+4\\4-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GK}\begin{pmatrix}-6\\19\end{pmatrix}$ Alors $Det\left(\overrightarrow{FH};\overrightarrow{GK}\right)=38+36=74\neq 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{GK}$ne sont pas colinéaires, donc **les droites (FH) et (GK) ne sont pas parallèles, elles sont bien sécantes**

b. On a $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ Donc $Det\left(\overrightarrow{FK};\overrightarrow{FL}\right)=4-4=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FL}$ sont colinéaires, donc **les points F, K et L sont alignés et $F\in(KL)$**

2) On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ Or $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$
donc $\overrightarrow{IJ}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$
et donc $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$: les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires, donc **les droites (IJ) et (AC) sont parallèles**

Corrigé Entraînement n°2

1) a. On a $\overrightarrow{RE}\begin{pmatrix}-4-3\\8-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{US}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ Alors $Det\left(\overrightarrow{RE};\overrightarrow{US}\right)=14-8=6\neq 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{RE}$ et $\overrightarrow{US}$ ne sont pas colinéaires, donc **les droites (RE) et (US) ne sont pas parallèles.**

b. On a $\overrightarrow{EP}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EU}\begin{pmatrix}10\\-15\end{pmatrix}$ Donc $Det\left(\overrightarrow{EP};\overrightarrow{EU}\right)=-60-(-60)=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{EP}$ et $\overrightarrow{EU}$ sont colinéaires, donc **les points E, P et U sont alignés.**

2) On a $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RA}=-\overrightarrow{RS}+2\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RU}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RU}$ donc on a $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
et $\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RU}+\overrightarrow{UB}=-\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RU}+\overrightarrow{RU}+3\overrightarrow{UT}$ or $\overrightarrow{UT}=\overrightarrow{RS}$
donc $\overrightarrow{SB}=-\overrightarrow{RS}+2\overrightarrow{RU}+3\overrightarrow{RS}=2\overrightarrow{RS}+2\overrightarrow{RU}$ donc on a $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et on voit que $\boldsymbol{\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SA}}$
Les vecteurs $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SA}$ sont colinéaires, **les points S, A et B sont alignés et A est le milieu de $[SB]$**

Corrigé Entraînement n°3

1) a. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}3+3\\6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{TH}\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$ Alors $Det\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{TH}\right)=36-(-36)=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{TH}$ sont colinéaires, donc **les droites (MA) et (TH) sont parallèles et donc non sécantes.**

b. On a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-7\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$ Donc $Det\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AS}\right)=42-10=32\neq 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AS}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, H et S ne sont pas alignés.

2) On a $\overrightarrow{VZ}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RU}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{SU}=\overrightarrow{RS}+2\overrightarrow{RT}-4\overrightarrow{RS}=-3\overrightarrow{RS}+2\overrightarrow{RS}+2\overrightarrow{ST}=-\overrightarrow{RS}-2\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{RU}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$
$Det\left(\overrightarrow{VZ}\,;\,\overrightarrow{RU}\right)=-2-1=-3\neq 0$
Les vecteurs $\overrightarrow{VZ}$ et $\overrightarrow{RU}$ sont non colinéaires, donc les droites (VZ) et (RU) ne sont pas parallèles : **le quadrilatère n'est pas un trapèze de bases (VZ) et (RU)**