4. Probabilités

• Rappel express formules

$p(A) = \dfrac{nombre\ dans\ A}{nombre\ total}$ $\quad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ $\quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

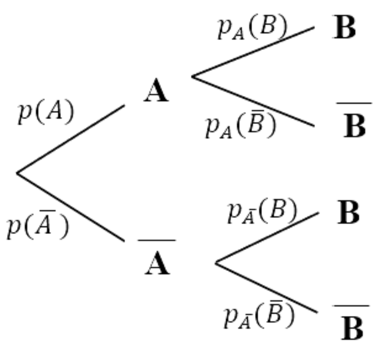
Dans un tableau :

	B	$\overline{B}$	Total
A	$p(A \cap B)$	$p(A \cap \bar{B})$	$p(A)$
$\overline{A}$	$p(\bar{A} \cap B)$	$p(\bar{A} \cap \bar{B})$	$p(\bar{A})$
Total	$p(B)$	$p(\bar{B})$	1

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Dans un arbre :



$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

✓ Exercice 1

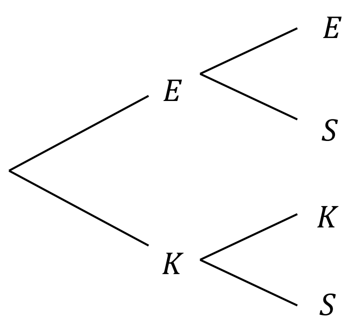
Elia, Kim et Sam jouent à un jeu vidéo. Elles décident de jouer en deux tours : Elia et Kim s'affrontent au premier tour, et celle qui gagne la partie affronte Sam au 2ème tour.

On estime que Elia à 40 % de chances de gagner une partie contre Kim et 20 % de chances de gagner une partie contre Sam.
Kim, elle, a 30 % de chances de gagner contre Sam

On suppose que les issues de ces deux parties sont indépendantes.
On note :

- E l'évènement « Elia gagne la partie » ;
- K l'évènement « Kim gagne la partie » ;
- S l'évènement «Sam gagne la partie ».

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.



2. a. Déterminer la probabilité que Kim gagne les 2 parties

b. Montrer que la probabilité que Sam gagne la 2ème partie est de 74 %

c. Sachant que Sam a gagné la 2ème partie, quelle est la probabilité qu'elle l'ait jouée contre Kim ?

> *Pour cette question, vous pourrez vous servir de l'aide calcul ci-dessous :*
>
> *Aide-calcul :* $\frac{0,74}{0,08} \simeq 9,3$ $\quad \frac{0,74}{0,18} \simeq 4,1$ $\quad \frac{0,74}{0,32} \simeq 2,3$ $\quad \frac{0,74}{0,42} \simeq 1,8$
>
> $\frac{0,08}{0,74} \simeq 0,11$ $\quad \frac{0,18}{0,74} \simeq 0,24$ $\quad \frac{0,32}{0,74} \simeq 0,43$ $\quad \frac{0,42}{0,74} \simeq 0,57$

3. Elia, Kim et Sam décident de jouer un 3ème tour où celle qui a perdu la 2ème partie affronte la perdante de la 1ère partie.
Représenter cette situation par un nouvel arbre de probabilités.

✓ Exercice 2

Une étude statistique a montré que 4 % de la population d'un pays est intolérante au gluten.
Pour cette maladie, un laboratoire pharmaceutique élabore un nouveau test de dépistage.
Les essais sur un groupe témoin de 1000 individus ont donné les résultats suivants :

- 4 % des individus du groupe témoin sont atteints par la maladie ;
- 85 % des personnes atteintes par la maladie réagissent positivement au test ;
- 950 personnes ne sont pas atteintes par la maladie et réagissent négativement au test.

1. a. Combien y a-t-il d'individus du groupe témoin qui sont atteints par la maladie et qui réagissent positivement au test ?

b. Recopier et compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Test positif	Test négatif	Total
Malade	34		40
Non malade		950	
Total			1 000

On choisit au hasard un individu dans le groupe témoin et on admet que chaque individu a la même probabilité d'être choisi. On note les évènements suivants :

- M : « l'individu choisi est atteint par la maladie » ;
- T : « l'individu choisi réagit positivement au test ».

2. Définir par une phrase l'évènement $M \cap T$ puis donner sa probabilité.

3. a) Calculer la probabilité $P_M(T)$.

b) Traduire ce résultat par une phrase dans le contexte de l'exercice.

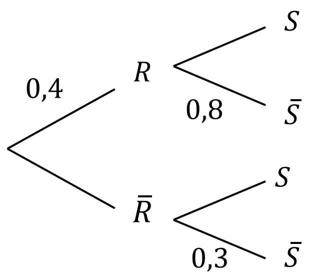
4. Certains organismes de santé autorisent la commercialisation d'un test de dépistage lorsque la probabilité de ne pas être atteint par la maladie, sachant que la réaction au test est positive, est inférieure à 25%.
Le laboratoire pharmaceutique peut-il espérer, selon ce critère, une commercialisation de son test ?

✓ **Automatismes**

1ère partie : En réponses à donner.

1) Dans un sac, on met des jetons numérotés indiscernables au toucher.
Il y a 8 jetons numérotés ①, 5 jetons numérotés ② et 7 jetons numérotés ③. On tire un jeton au hasard.
Quelle est la probabilité d'avoir eu un jeton dont le numéro est supérieur ou égal à 2 ?

2) On donne l'arbre de probabilité ci-contre.
Calculer $p(\bar{R} \cap \bar{S})$



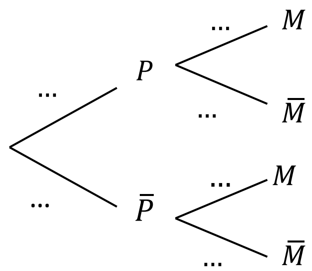
3) On donne le tableau de probabilité ci-contre.
Calculer $p_A(\bar{T})$

	A	$\bar{A}$	Total
T	0,1		
$\bar{T}$			0,7
Total		0,6	

4) Pour fidéliser ses touristes, l'office de tourisme d'une ville propose gratuitement un jeu en deux étapes. La première étape consiste à gratter une carte pour gagner un porte-clés de la ville. La deuxième étape consiste à gratter une autre carte pour gagner une entrée à la piscine municipale.
Le touriste a sept chances sur dix de gagner un porte-clefs de la ville et quatre chances sur dix de gagner une entrée gratuite à la piscine.
On définit les évènements suivants :

- P : « le touriste gagne un porte-clefs de la ville »
- M : « le touriste gagne une entrée gratuite à la piscine municipale ».

Compléter l'arbre de probabilités ci-contre.



5) Un club de vacances propose à ses clients de souscrire à des formules optionnelles concernant les activités de loisirs et les visites de sites.
On a relevé que sur l'ensemble des 2 500 vacanciers :
• 80% des clients ont souscrit à l'option « Visites de sites » : évènement V
• 800 clients ont souscrit à l'option « Activités de loisirs », évènement A
• 200 clients n'ont pris aucune des 2 options.
On choisit un client au hasard.

Compléter le tableau croisé de fréquences donné ci-contre :

	A	$\bar{A}$	Total
V			
$\bar{V}$			
Total			1

6) Une association propose chaque jour un spectacle au prix de 20 €.
Pour le promouvoir l'association annonce qu'à l'entrée du spectacle, chaque client lancera un dé non truqué, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

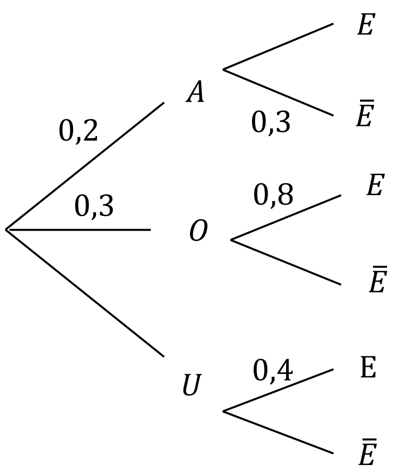
- Si le résultat est 6, l'entrée sera gratuite.
- Si le résultat est 1, l'entrée sera à demi-tarif.
- Si le résultat est 5, le client aura une remise de 20%.
- Dans les autres cas, le client paiera plein tarif.

Quels sont tous les prix possibles que paiera le client ?

2ème partie. En QCM, une seule réponse juste.

<table>
<tr><th></th><th>A.</th><th>B.</th><th>C.</th><th>D.</th></tr>
<tr><td>

1) Soit A, O, U et E quatre événements.
On donne l'arbre de probabilité ci-dessous.



Alors $p(E)$ vaut :

</td><td>0,23</td><td>0,58</td><td>2,3</td><td>2,9</td></tr>
<tr><td>

2) Soit A et B deux événements dont on donne ci-dessous le tableau croisé des effectifs.

	A	$\bar{A}$	Total
B	44	33	77
$\bar{B}$	84	50	134
Total	128	83	211

Alors $P_A(B)$ vaut :

</td><td>44</td><td>$\frac{44}{211}$</td><td>$\frac{44}{128}$</td><td>$\frac{44}{77}$</td></tr>
<tr><td>

3) Soit A et B deux événements tels que :
$P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$.
Alors $P(A \cup B)$ vaut :

</td><td>0,7</td><td>1,1</td><td>0,9</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>

4) 200 personnes sont interrogées sur leurs goûts alimentaires. 120 personnes disent préférer le sucré, parmi lesquelles 30 disent préférer des fruits à une glace au chocolat.
Les autres préfèrent le salé, parmi lesquelles 20 disent préférer une salade à des chips.
On choisit une personne au hasard.
Quelle est la probabilité que ce soit une personne qui préfère le salé et les salades ?

</td><td>4 %</td><td>10 %</td><td>50 %</td><td>80 %</td></tr>
</table>

5) Une urne contient 10 boules. Sur chaque boule est inscrit un nombre conformément au tableau ci-dessous.

Nombre inscrit sur la boule	5	6	10	11	12	13	14	Total
Nombre de boules	1	2	1	3	1	1	1	10

Ainsi, une boule porte le numéro 5, deux boules portent le numéro 6, etc.
Un joueur mise 10 € et tire une boule au hasard. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
Le joueur reçoit la somme en euro inscrite sur la boule tirée.

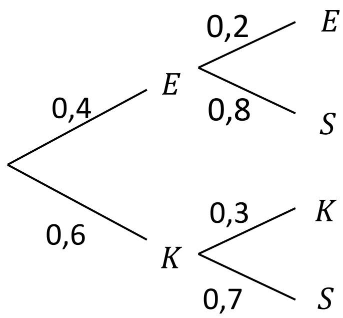
Calculer la probabilité que le joueur perde de l'argent (c'est-à-dire reçoive moins de 10 € à l'issue du tirage).

A. 30%	**B.** 0,4	**C.** 11 %	**D.** 0,17

4. CORRECTIONS Probabilités

✓ CORRIGÉ **Exercice 1**

1.

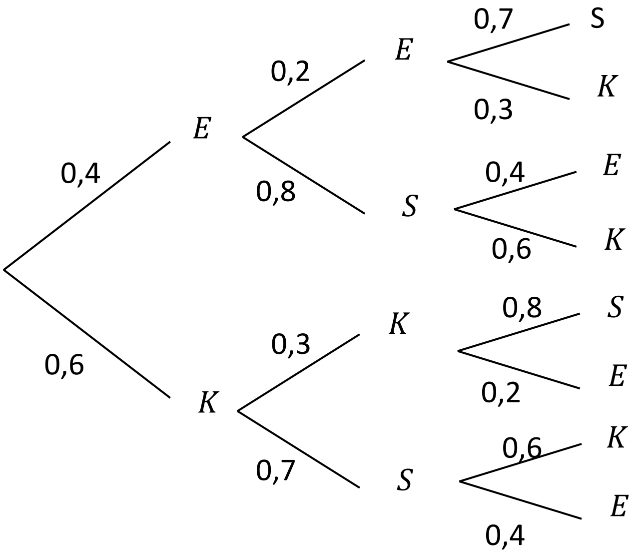


2. a. $p(K \cap K) = 0{,}6 \times 0{,}3 = \mathbf{0,18}$
Il y a 18 % de chances que Kim gagne les 2 parties

b. $p(S) = p(E \cap S) + p(K \cap S) = 0{,}4 \times 0{,}8 + 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}32 + 0{,}42 = \mathbf{0,74}$
Il y a bien 74 % de chances que Sam gagne la 2ème partie.

c. $p_S(K) = \frac{p(K \cap S)}{p(S)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}7}{0{,}74} = \frac{0{,}42}{0{,}74} \simeq \mathbf{0,57}$
Il y a environ 74 % de chances qu'elle ait joué contre Kim

3.
.



✓ CORRIGÉ **Exercice 2**

1. a. $P = 0{,}04 \times 1000 = 40$: Il y a 40 personnes malades
$P = 0{,}85 \times 40 = 34$: **Il y a donc 34 personnes malades qui réagissent positivement au test**

b.

	Test positif	Test négatif	Total
Malade	34	**6**	40
Non malade	**9 010**	950	**9 960**
Total	**9 044**	**956**	1 000

2. $M \cap T$: « l'individu choisi est atteint par la maladie <u>**et**</u> réagit positivement au test
$p(M \cap T) = \frac{\mathbf{34}}{\mathbf{1000}}$ donc **3,4 % de chances**

3. a) $P_M(T) = \frac{p(M \cap T)}{p(M)} = \frac{34}{40} = \frac{17}{20} = \frac{8{,}5}{10} = \mathbf{0,85}$ (donnée directement dans l'énoncé)

b) Sachant que l'individu est malade, il y a 85 % de chances qu'il réagisse positivement au test.

4. $p_T(\overline{M}) = \frac{p(\overline{M} \cap T)}{p(T)} = \frac{9010}{9044}$ On est plus proche de 1 que de 0,25, donc **le laboratoire ne pourra pas commercialiser son test**

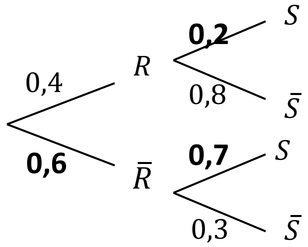
✓ CORRIGÉ **Automatismes**

1ère partie : CORRIGÉ

1) Au total : 8 + 5 + 7 =20 jetons alors $p(②\text{ou}③) = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$

Il y a 60% de chances probabilité d'avoir eu un jeton dont le numéro est supérieur ou égal à 2

2)



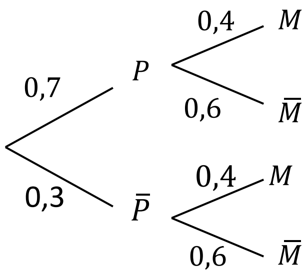
Compléter l'arbre…
puis $p(\bar{R} \cap \bar{S}) = p(\bar{R}) \times p_{\bar{R}}(\bar{S}) = 0{,}6 \times 0{,}7 = \mathbf{0{,}42}$

3)

	A	$\bar{A}$	Total
T	0,1	**0,2**	**0,3**
$\bar{T}$	**0,3**	**0,4**	0,7
Total	**0,4**	0,6	**1**

Compléter le tableau…
Puis $p_A(\bar{T}) = \frac{p(A\cap\bar{T})}{p(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4} = \mathbf{0{,}75}$

4)



5)

	A	$\bar{A}$	Total
V	0,2	0,6	0,8
$\bar{V}$	0,12	0,08	0,2
Total	0,32	0,68	1

• évènement A : $\frac{800}{2500} = \frac{8}{25} = \frac{32}{100}$

• évènement $\bar{A} \cap \bar{V}$: $\frac{200}{2500} = \frac{2}{25} = \frac{8}{100}$

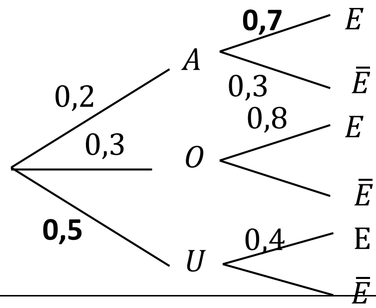
6)

• Si le résultat est 6 : le prix est 0 €
• Si le résultat est 5 : $0{,}2 \times 20 = 4$ €, le prix sera 16€
• Si le résultat est 1 : le prix est 10 €
• Dans les autres cas, le prix sera 20 €

Les prix possibles sont $\mathbf{0}$€, $\mathbf{10}$€, $\mathbf{16}$€ et $\mathbf{20}$€

2ème partie. CORRIGÉ

1) $p(E) = 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}5 \times 0{,}4$
$= 0{,}14 + 0{,}24 + 0{,}20 = 0{,}58$



Réponse **B**

2) $P_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{44}{128}$

Réponse **C**

3) $P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$

Réponse **A**

4) $\frac{20}{200} = 10\ \%$

Réponse **B**

5) Le joueur perd de l'argent s'il a une boule marquée 5 (il perd 5€) ou 6 (il perd 4 €). Dans les autres cas, il gagne entre 0€ et 4 €.
Alors $p(Perd) = \frac{1+2}{10} = 0{,}3$

Réponse **A**