$3^{\text{ème}}$ sujet : CORRECTIONS

Corrigé Exercice 1

1. On a deux solutions, α et β avec $\mathbf{0} < \alpha < 1$ et $\mathbf{2} < \beta < 3$

2. f atteint un **maximum d'environ 14,7 pour $\boldsymbol{x = 1}$**

3.

x	0		1		7
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\simeq 14{,}7$	$\searrow$	$\simeq 0{,}3$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

4. $y = f'(4)(x-4)+3$ Or sur le graphique, on voit $f'(4) = -\frac{2}{1} = -2$
Donc $y = -2(x-4)+3 \iff \boldsymbol{y = -2x + 11}$

Corrigé Exercice 2

1. D'une année (n) sur l'autre $(n+1)$, le nombre de voiture baisse de 25%, ce qui revient à multiplier par 0,75 (soit $0{,}75u_n$) puis on ajoute les 3000 voitures neuves : $\boldsymbol{u_{n+1} = 0{,}75u_n + 3\,000}$.

2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,000 = 0{,}75u_n + 3\,000 - 12\,000$ or, on a aussi $u_n = v_n + 12\,000$ donc
$v_{n+1} = 0{,}75(v_n + 12\,000) - 9\,000 = 0{,}75v_n + 9\,000 - 9\,000 = 0{,}75\,v_n$
La suite $(\boldsymbol{v_n})$ est bien une suite géométrique de raison 0,75 de premier terme $\boldsymbol{v_0 = u_0 - 12000 = -2\,000}$

b. $v_n = v_0 \times q^n = \boldsymbol{-2\,000 \times 0{,}75^n}$ comme $0{,}75 \in [0;1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

c. $u_n = v_n + 12\,000 = \boldsymbol{-2\,000 \times 0{,}75^n + 12\,000}$

d. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n + 12\,000) = 0 + 12\,000 = \boldsymbol{12\,000}$
Au bout d'un grand nombre d'années, le parc automobile de ce loueur **comptera 12 000 voitures**

3. On cherche n tel que $u_n \geq 11950$
À l'aide de la calculatrice, on trouve $u_{12} \simeq 11\,936$ et $u_{13} \simeq 11\,952$ ce sera donc à partir de $n = 13$, c'est-à-dire de l'**année $\boldsymbol{2028}$**

Corrigé Exercice 3

1. On a $f(0) = 400 \times 1 + 40 = 440$. Il y avait 440 crapauds dans le lac lors de l'introduction des truites.

2. On calcule d'une part :

$$\begin{aligned} f'(t) &= (0{,}08\mathrm{t} - 8)e^{\frac{t}{50}} + (0{,}04t^2 - 8t + 400)\left(\frac{1}{50}e^{\frac{t}{50}}\right) + 0 \\ &= (0{,}08\mathrm{t} - 8)e^{\frac{t}{50}} + \frac{1}{50}(0{,}04t^2 - 8t + 400)e^{\frac{t}{50}} \\ &= (0{,}08\mathrm{t} - 8)e^{\frac{t}{50}} + \left(\frac{0{,}04}{50}t^2 - \frac{8}{50}t + \frac{400}{50}\right)e^{\frac{t}{50}} \\ &= (0{,}08t - 8 + 0{,}0008t^2 - 0{,}16t + 8)e^{\frac{t}{50}} \\ &= (0{,}0008t^2 - 0{,}08t)e^{\frac{t}{50}} \end{aligned}$$

Et d'autre part : $0{,}0008t\,(t-100)e^{\frac{t}{50}} = (0{,}0008t^2 - 0{,}08t)e^{\frac{t}{50}}$ (par développement dans la parenthèse)
On a donc effectivement : $f'(t) = 0{,}0008t\,(t-100)e^{\frac{t}{50}}$ CQFD

3.

t	0		100		120
$0{,}0008t$		+		+	
$t-100$		−	0	+	
$e^{\frac{t}{50}}$		+		+	
$f'(t)$		−	0	+	
$f(t)$	440	↘	40	↗	≃ 216,37

4. a. Il faut 100 jours pour que le nombre de crapauds atteigne son minimum, donc $J = 100$.
Il y aura au minimum 40 crapauds.

b. Au bout de 120 jours il y aura 216 crapauds, donc le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus après avoir atteint son minimum.

c. On constate que $f(115) < 140 < f(116)$ donc c'est à partir de 116 jours qu'il y aura plus de 140 crapauds.

Corrigé Exercice 4

1. Réponse B : $N(-3\,;\,-4\,;\,6)$;

En effet, pour $t = -2$, on obtient : $\begin{cases} x = 1 + 2(-2) = -3 \\ y = -2 + (-2) = -4 \\ z = 4 - (-2) = 6 \end{cases}$

2. Réponse C : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ En effet : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. Réponse B : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

En effet, pour $t = 0$, on a $\begin{cases} x = 2 - 0 = 2 \\ y = 1 - 0 = 1 \\ z = 2 \times 0 = 0 \end{cases}$ donc le point B appartient à la droite ayant cette représentation

et pour $t = 1$, on a $\begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = 2 \times 1 = 2 \end{cases}$ donc le point A appartient à la droite ayant cette représentation

Cette droite est donc bien la droite (AB).

4. Réponse A

• On a $\overrightarrow{OD} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc ce n'est pas la réponse C.

• $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1-1 \\ -2-0 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc ce n'est pas la réponse B.

• On transforme :

$$\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{DC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - 3\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$$

Les trois vecteurs $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont coplanaires, donc les points A, B, C et D sont aussi coplanaires donc c'est la :
Réponse A : $\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AB}\ \ et\ \ \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

(Une autre façon de faire est de calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\ \ et\ \ \overrightarrow{AC}$ et de résoudre le système $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. On doit trouver une solution, ce qui prouve le résultat)