
Entraînement 1

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0,2y = \frac{2t + 5}{\sqrt{t}}$$

- 1) Soit h une solution de l'équation différentielle $(H) : y' + 0,2y = 0$
Montrer que si p une solution de l'équation différentielle (E) , alors la fonction f définie par $f = h + p$ est aussi une solution de (E) .
- 2) Montrer que la fonction p_0 définie par : $p_0(t) = 10\sqrt{t}$ est une solution de l'équation différentielle (E) .
- 3) En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E) .

Entraînement 2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 2y = (1 - 2t) \ln t$$

- 1) Soit g une solution de l'équation différentielle (E) .
Montrer que si f est une autre solution de (E) , alors la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle $(H) : y' - 2y = 0$.
- 2) Montrer que la fonction g_0 définie par $g_0(t) = t \ln t + \frac{1}{2}$ est une solution de l'équation différentielle (E) .
- 3) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle (H) .
- 4) En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E) .

Corrigé Entraînement 1

1) h est une solution de (H) donc $h' + 0,2h = 0 \Rightarrow h' = -0,2h$.

Si p est une solution de (E) , alors $p' + 0,2p = \frac{2t+5}{\sqrt{t}} \Rightarrow p' = \frac{2t+5}{\sqrt{t}} - 0,2p$

On a alors : $f' + 0,2f = h' + p' + 0,2(h + p) = -0,2h + \frac{2t+5}{\sqrt{t}} - 0,2p + 0,2h + 0,2p$.

Alors $f' + 0,2f = \frac{2t+5}{\sqrt{t}}$ donc **f est bien aussi une solution de (E) .**

2) On calcule $p'_0 + 0,2p_0 = 10 \times \frac{1}{2\sqrt{t}} + 0,2 \times 10\sqrt{t} = \frac{5}{\sqrt{t}} + 2\sqrt{t} = \frac{5}{\sqrt{t}} + \frac{2t}{\sqrt{t}} = \frac{2t+5}{\sqrt{t}}$.

Donc p_0 est bien une solution de (E) .

3) Les solutions f de l'équation différentielle (E) vérifient donc : $f = h + p_0$.

Or les solutions de (H) sont $h(x) = Ke^{-0,2t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Donc les solutions de (E) sont donc de la forme : **$f(x) = Ke^{-0,2t} + \frac{2t+5}{\sqrt{t}}$.**

Corrigé Entraînement 2

1) Si f et g sont solutions de (E) , alors $f' - 2f = (1 - 2t) \ln t \Leftrightarrow f' = 2f + (1 - 2t) \ln t$
et de même $g' = 2g + (1 - 2t) \ln t$.

Alors : $h' - 2h = f' - g' - 2(f - g) = 2f + (1 - 2t) \ln t - (2g + (1 - 2t) \ln t) - 2f + 2g$
 $= (1 - 2t) \ln t - 2g - (1 - 2t) \ln t + 2g \Rightarrow h' - 2h = 0$

Alors h est bien solution de (H) .

2) On calcule $g'_0 - 2g_0 = 1 \ln t + t \times \frac{1}{t} + 0 - 2 \left(t \ln t + \frac{1}{2} \right) = \ln t + 1 - 2t \ln t - 1$
 $\Rightarrow g'_0 - 2g_0 = (1 - 2t) \ln t$.

Donc g_0 est bien une solution de (E) .

3) On $y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$ donc les solutions de (H) sont de la forme $y = Ke^{2t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

4) g_0 étant une solution particulière de (E) , les solutions de (E) sont donc de la forme :

$y = Ke^{2t} + g_0 \Rightarrow y = Ke^{2t} + t \ln t + \frac{1}{2}$.