Correction Sujet n°1

Partie A

1. Graphiquement, on peut déterminer le signe de f' et donc le sens de variation de la fonction f

x	0	1	5
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		↗	↘

f est croissante sur $[0 ; 1]$
et décroissante sur $[1 ; 5]$

2. Graphiquement, on peut déterminer le signe de f'' et donc la convexité de la fonction f

x	0	2	5
$f''(x)$		-	0 +
$f(x)$		concave	PI convexe

f est convexe sur $[2 ; 5]$

3. D'après le tableau précédent, f'' s'annule et change de signe pour $x = 2$, donc la courbe de f admet un point d'inflexion en $x = 2$

Partie B

1.

x	0	$+\infty$
$5x$	0	+
e^{-x}		+
$f(x)$	0	+

2. a) On a $f(x) = \frac{5x}{e^x} = 5 \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$

Or, par les croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = 0$,

donc, par inverse de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

b) $f'(x) = 5e^{-x} + 5x(-e^{-x}) = (5 - 5x)e^{-x}$

x	0	1	$+\infty$
$5 - 5x$		+	0 -
e^{-x}		+	+
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	0	↗	$\frac{5}{e}$ ↘ 0

Avec $f(1) = 5 \times 1e^{-1} = \frac{5}{e} \approx 1,8$

3. On a $e^x = 5x \Leftrightarrow 1 = \frac{5x}{e^x} \Leftrightarrow 1 = 5xe^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 1$

Or, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$, avec $1 \in [f(0); f(1)]$. Donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $[0; 1]$.

A la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 0,26$

4. $F'(x) = (-5)e^{-x} + (-5x - 5) \times (-e^{-x}) = (-5 + 5x + 5)e^{-x} = 5xe^{-x} = f(x)$

Donc F est bien une primitive de f sur $[0 ; 5]$.

Correction Sujet n°2

Partie 1

1. $f(0) = 2$ et $f'(0) = \frac{-1}{1} = -1$.

2. La fonction f semble convexe sur $[0; 3]$, sa courbe y est au dessus de ses tangentes.

Partie 2

1. D'une part : $y' = g'_k(x) = 1e^{-x} + (x - k)(-e^{-x}) = (1 + k - x)e^{-x}$

D'autre part : $-y + e^{-x} = -g_k(x) + e^{-x} = -(x - k)e^{-x} + e^{-x} = (-x + k + 1)e^{-x} = g'_k(x)$

Pour tout réel k , la fonction $g_k(x)$ est bien une solution de l'équation (E)

2. $f(x)$ est donc de la forme $(x - k)e^{-x}$ avec $f(0) = 2 \Leftrightarrow (0 - k)e^0 = 2 \Leftrightarrow -k = 2 \Leftrightarrow k = -2$
Donc $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

Partie 3

1. a. $f'(x) = 1e^{-x} + (x + 2)(-e^{-x}) = (1 - x - 2)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$ CQFD

b.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x - 1$	+	0	-
e^{-x}	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	e	$\searrow$

Avec $f(-1) = (-1 + 2)e^{-(-1)} = e$

2. a. $f''(x) = (-1)e^{-x} + (-x - 1)(-e^{-x}) = (-1 + x + 1)e^{-x} = xe^{-x}$

b. On a

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
e^{-x}	+		+
$f''(x)$	-	0	+

Donc la fonction f est bien convexe sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Correction Sujet n°3

PARTIE A

1. $f'(1,5) = 0$ car c'est la tangente en B est horizontale.

2. Le coefficient directeur de cette tangente est 1 et son ordonnée à l'origine est donc 2 : son équation est $y = x + 2$

Remarque : vous pouvez passer par l'équation de la tangente classique avec $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f'(1) = 1$ et $f(1) = 3$ plus quelques calculs

3. La courbe semble être **concave sur $[0,5; 6]$** , elle est en dessous de ses tangente, au moins pour les deux qui sont données, et garde la même orientation de courbure.

PARTIE B

1. a. on a $x \left(3 \frac{\ln x}{x} - 2 + \frac{5}{x} \right) = 3 \ln x - 2x + 5 = f(x)$ CQFD

b. Par croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \frac{\ln x}{x} - 2 + \frac{5}{x} = -2$
 Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc par produit de limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

2. $f'(x) = -2 + 3 \times \frac{1}{x} = \frac{-2x+3}{x}$

3. On a :

x	0,5	1,5	$+\infty$
$-2x + 3$	+	0	-
x	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$4 - 3 \ln 2$	$\nearrow$ $2 + 3 \ln 1,5$	$\searrow$ $-\infty$

On a $f(0,5) = -2 \times 0,5 + 5 + 3 \ln \left(\frac{1}{2} \right) = 4 - 3 \ln 2 \approx 1,9$

$f(1,5) = -2 \times 1,5 + 5 + 3 \ln 1,5 = 2 + 3 \ln 1,5 \approx 3,2$

4. La fonction f est strictement positive sur $[0,5; 1,5]$, l'équation $f(x) = 0$ n'y a donc pas de solution.
 La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1,5; 6]$, avec $f(1,5) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur $[0,5; +\infty[$.

À la calculatrice, on a $\alpha \approx 4,88$

5. On a :

x	0,5	$\alpha \approx 4,88$	6
$f(x)$	+	0	-

6. $F'(x) = -2x + 2 + 3 \ln(x) + 3x \times \frac{1}{x} = -2x + 2 + 3 \ln(x) + 3 = -2x + 5 + 3 \ln x$

On a $F'(x) = f(x)$ donc F est bien une primitive de f

Correction Sujet n°4

Partie I

1. $u_1 = u_0 + 0,05(20 - u_0) = 1 + 0,05(20 - 1) = 1 + 0,95 = \mathbf{1,95}$ CQFD

2. a., $u_{n+1} = u_n + 0,05(20 - u_n) = u_n + 1 - 0,05u_n = \mathbf{0,95u_n + 1}$ CQFD

b. $v_{n+1} = 20 - u_{n+1} = 20 - (0,95u_n + 1) = 19 - 0,95u_n = 19 - 0,95(20 - v_n) = 19 - 19 + 0,95v_n$
Donc $v_{n+1} = 0,95v_n$ et $v_0 = 20 - u_0 = 20 - 1 = 19$

La suite (v_n) est bien géométrique de terme initial 19 et de raison 0,95

c. On a alors $v_n = v_0 \times q^n = 19 \times 0,95^n$ et comme $u_n = 20 - v_n$ on a bien $\mathbf{u_n = 20 - 19 \times 0,95^n}$.

3. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$ car $0,95 \in] -1; 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20 - 19 \times 0 = \mathbf{20}$

Partie II

1. D'une part : $y' = L'(t) = -19 \times (-0,05e^{-0,05t}) = 0,95e^{-0,05t}$

D'autre part : $0,05(20 - y) = 0,05(20 - L(t)) = 0,05(20 - (20 - 19e^{-0,05t}))$
 $= 0,05(20 - 20 + 19e^{-0,05t}) = 0,95e^{-0,05t} = y'$

La fonction L est bien solution de l'équation différentielle (E)

Par ailleurs, on a bien $L(0) = 20 - 19e^0 = 20 - 19 = \mathbf{1}$

2. a. On a $L'(t) = 0,95e^{-0,05t}$ donc $L'(0) = 0,95$ et $L'(5) = 0,95e^{-0,25} \simeq 0,74$.

Donc $L'(0) > L'(5)$ La vitesse de croissance semble diminuer au cours du temps

(Remarque, on le prouverait facilement en dérivant : $L''(t) = -0,0475e^{-0,05t} < 0$ donc $L'(t)$ est décroissante)

b. $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,05t = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc, par composée de limites, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,05t} = 0$

et par conséquent $\lim_{t \rightarrow +\infty} L'(t) = 0,95 \times 0 = 0$

Ce résultat est cohérent avec la description du modèle de croissance, puisque le bambou atteint une taille maximale, cela signifie bien qu'**avec le temps la vitesse de croissance doit diminuer jusqu'à devenir nulle.**