Savoir Pb.1 : Probabilités conditionnelles (Rappels)

Attention, il s'agit de sujet type-bac… les différents entraînements peuvent porter sur des difficultés différentes. Par exemple, l'entraînement n° 1 est classique, le n°2 a des inconnues (et donc des équations)…

Entraînement n° 1

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47% affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.
Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.
On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A. Arrondir à 10^{-4}.

3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.

Entraînement n° 2

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire.
Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29% affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable.
Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet »
- $\bar{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet »
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet »
- $\bar{A}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0{,}29$.

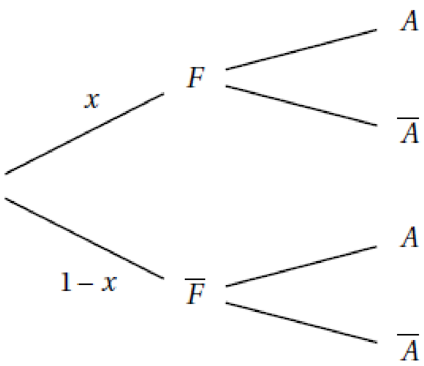
1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\bar{F}}(A)$.

2. On pose $x = P(F)$.

a. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

b. En déduire une égalité vérifiée par x

3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.



Entraînement n° 3

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.

Dans cet exercice les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».
La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est 0,17. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est 0,10.
La source A fournit 70% de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée. On considère les évènements suivants :

A : « La bouteille d'eau provient de la source A »
B : « La bouteille d'eau provient de la source B »
S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap S$.

2. Montrer que la probabilité de l'évènement S vaut 0,149.

3. Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.

Entraînement n° 4

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie B : Contrôle à la réception

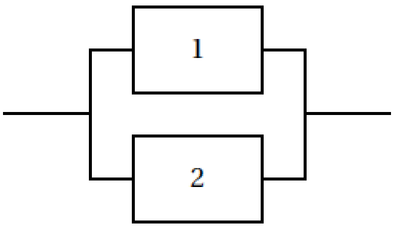
Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7%. On dit alors que la fève est conforme.
L'entreprise a trois fournisseurs différents : le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30% et le dernier apporte 20% du stock.
Pour le premier, 98% de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90% de sa production est conforme, et le troisième fournit 20% de fèves non conformes.
On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'évènement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'évènement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.

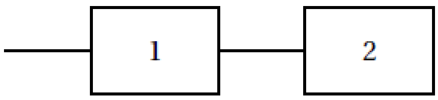
2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, L'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92% de fèves qu'elle achète soient conformes. Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

Entraînement n° 5

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A



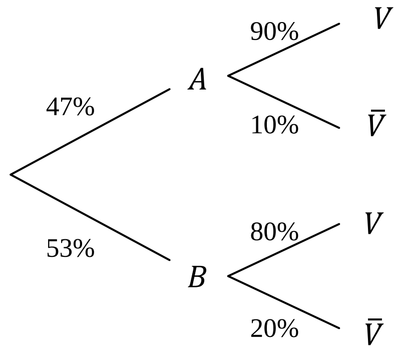
Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps.
Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Corrigé Savoir Pb.1

Corrigé Entraînement n° 1



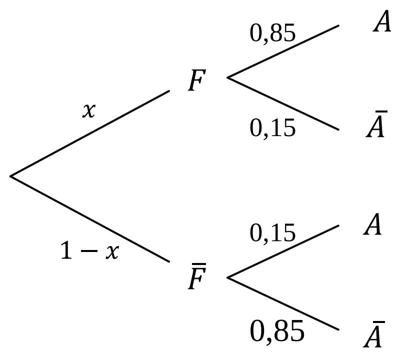
1. L'énoncé donne : $p(A) = 0{,}47$; $p_A(\bar{V}) = 0{,}1$ et $p_B(\bar{V}) = 0{,}2$.
Voir l'arbre ci-contre.

2. a. On a : $p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V) = p(A)p_A(V) + p(B)p_B(V)$
$= 0{,}47 \times 0{,}9 + 0{,}53 \times 0{,}8 = 0{,}847$
Il y a donc 84,7% de chances que la personne interrogée dise la vérité.

b. On a : $p_V(A) = \frac{0{,}47\times0{,}9}{p(V)} = \frac{0{,}461\times0{,}064}{0{,}847} \simeq 0{,}4994$.
Sachant que la personne interrogée dit la vérité, il y a donc environ 49,94% de chances qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3. Si la personne choisie vote effectivement pour le candidat A, c'est que soit elle a déclaré voter A sans mentir ($A \cap V$), soit elle a déclaré voter pour B mais a menti ($B \cap \bar{V}$).
Ces deux événements étant disjoints, la probabilité demandée est donc :
$p(A \cap V) + p(B \cap \bar{V}) = 0{,}47 \times 0{,}9 + 0{,}53 \times 0{,}2 = 0{,}529$. CQFD.

Corrigé Entraînement n° 2



Partie C

1. L'énoncé donne : $P_F(A) = 0{,}85$ et $P_{\bar{F}}(A) = 0{,}15$.

2. a. Voir l'arbre de probabilité ci-contre.

b. Étant donné que d'une part $p(A) = 0{,}29$ et que d'autre part :
$p(A) = p(A \cap F) + p(A \cap \bar{F}) = p(F)p_F(A) + p(\bar{F})p_{\bar{F}}(A)$
On a donc : $\mathbf{0,85x + 0,15(1-x) = 0,29}$.

3. On résout l'équation : $0{,}85x + 0{,}15(1-x) = 0{,}29$
$\Leftrightarrow 0{,}7x + 0{,}15 = 0{,}29 \Leftrightarrow x = 0{,}2$. Donc $p(F) = x = 0{,}2$.
Il y a donc 20% des personnes ayant répondu au sondage qui sont réellement favorables au projet.

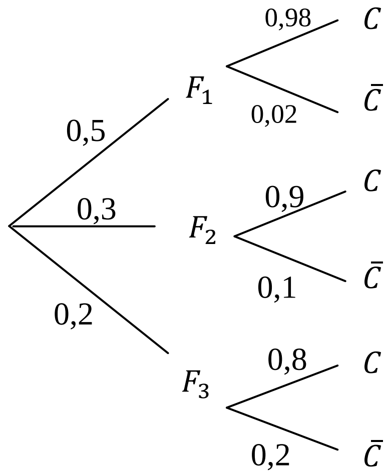
Corrigé Entraînement n° 3

1. L'énoncé donne : $p_A(S) = 0{,}17$; $p_B(S) = 0{,}1$ et $p(A) = 0{,}7$.
On a donc : $p(A \cap S) = p(A)p_A(S) = 0{,}7 \times 0{,}17 = 0{,}119$.

2. On a aussi : $p(S) = p(A \cap S) + p(\bar{A} \cap S) = 0{,}119 + 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}149$. CQFD.

3. On demande ici : $p_S(A) = \frac{p(S\cap A)}{p(S)} = \frac{0{,}119}{0{,}149} \simeq 0{,}799$. **Il y a donc environ 79,9% de chances que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.**

Corrigé Entraînement n° 4

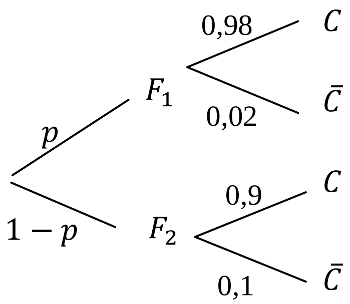


1. L'énoncé donne : $p(F_1) = 0{,}5$; $p(F_2) = 0{,}3$; $p(F_3) = 0{,}2$; $p_{F_1}(C) = 0{,}98$; $p_{F_2}(C) = 0{,}9$ et $p_{F_3}(\bar{C}) = 0{,}2$.

On a alors : $p_C(F_1) = \frac{p(C \cap F_1)}{p(C)}$ avec :

- $p(C \cap F_1) = p(F_1)p_{F_1}(C) = 0{,}5 \times 0{,}98 = 0{,}49$
- $p(C) = p(C \cap F_1) + p(C \cap F_2) + p(C \cap F_3) = 0{,}92$

On a donc : $p_C(F_1) = \frac{0{,}49}{0{,}92} \simeq 0{,}53$.
Sachant que la fève est conforme, il y a donc environ 53% de chances qu'elle provienne du fournisseur 1.



2. On représente cette fois-ci la situation avec le 2e arbre ci-contre, où $p(F_1) = p$ (et donc $p(F_2) = 1 - p$).

On veut avoir $p(C) = 0{,}92$.
Or $p(C) = p(C \cap F_1) + p(C \cap F_2) = 0{,}98p + 0{,}9(1 - p)$
On résout donc l'équation :

$$0{,}98p + 0{,}9(1 - p) = 0{,}92 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{0{,}02}{0{,}08} = 0{,}25$$

L'entreprise doit donc acheter 25% de ses fèves au 1er fournisseur.

Corrigé Entraînement n° 5

1. Puisque D_1 et D_2 sont indépendants, on a $p(D_1 \cap D_2) = p(D_1) \times p(D_2) = 0{,}39^2 = 0{,}6279$.

2. Le circuit B est défaillant lorsque le composant n°1 est défaillant **ou** lorsque le composant n°2 est défaillant.
Il faut donc calculer $p(D_1 \cup D_2) = p(D_1) + p(D_2) - p(D_1 \cap D_2) = 0{,}6279$.
Il y a donc 62,79% de chances que le circuit B soit défaillant avant un an.