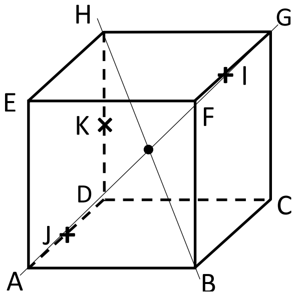
Corrections Savoir Ve.1

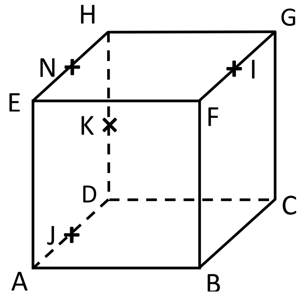
Corrigé Exercice 1

1) a) (IB) et (GC) : **sécantes**. Pour obtenir l'intersection, il faut prolonger ces deux droites.



b) (HB) et (GA) : **sécantes**. Elles sont appelées les « grandes diagonales » du cube et leur **intersection est le centre du cube**. ('grandes' par rapport aux 'petites' diagonales des faces).

c) (JK) et (AH) : **strictement parallèles.**

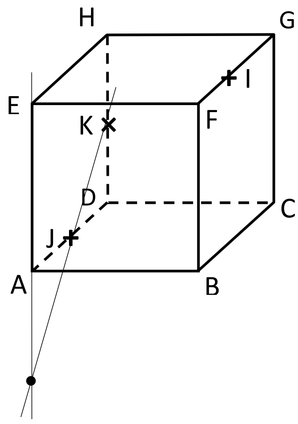


d) (GC) et (BA) : **non coplanaires.**

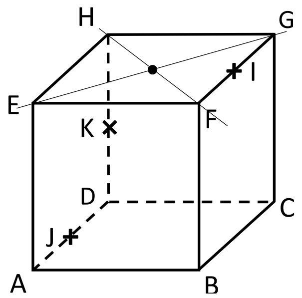
e) (IB) et (HJ) : **strictement parallèles.**

f) (FD) et (GH) : **non coplanaires.**

2) a) (EJ) et (HDA) : **(EJ) est contenue dans (HDA).**



b) (JK) et (ABE) : **sécants.** Leur **intersection** est le point d'**intersection des droites (JK) et (AE).**

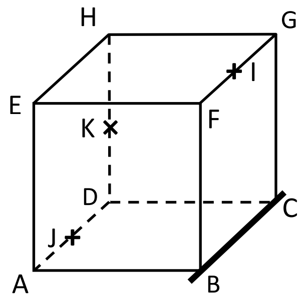


c) (IJ) et (AFG) : **(IJ) est contenue dans (AFG).**

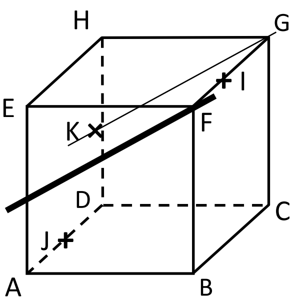
d) (FH) et (ACE) : **sécants**. Leur intersection est le point d'intersection des droites (FH) et (GE), c'est-à-dire **le centre de la face EFGH.**

e) (IJ) et (ABE) : **strictement parallèles**.

f) (EJ) et (BCG) : **strictement parallèles**.

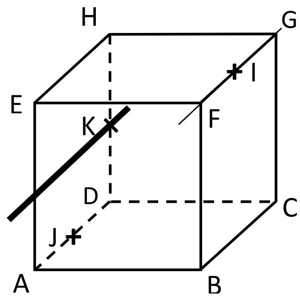


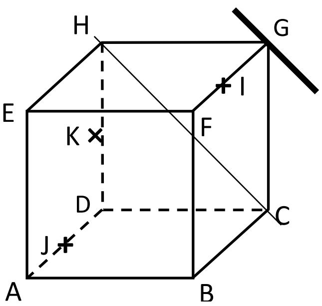
3) a) (ABJ) et (GIC) : **sécants selon la droite (BC)** (et même orthogonaux).



b) (KGI) et (ABE) : **sécants** et leur intersection est la **droite** de (ADE) **passant par F et parallèle à (GK).** (orthogonaux).

c) (KGI) et (EAD) : **sécants** et leur intersection est la **droite** de (ADE) **passant par K et parallèle à (GF).**

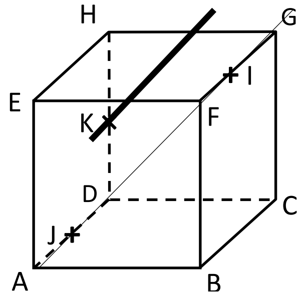




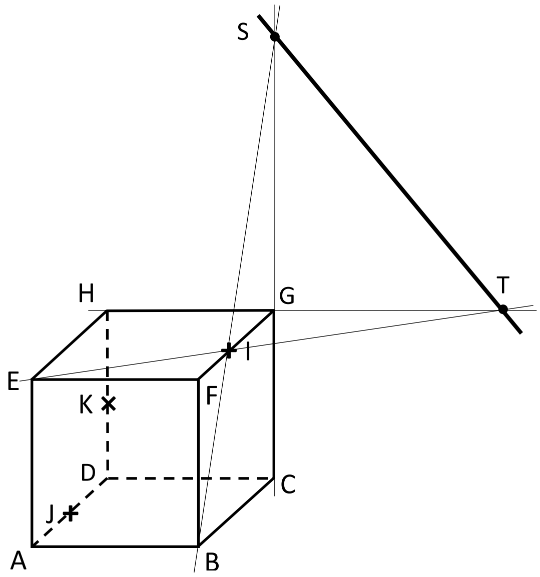
d) (EBG) et (HDC) : **sécants** et leur intersection est la **droite passant par G et parallèle à (HC).**

Corrigé Exercice 1 *Fin*

e) (IJK) et (HDC) : **sécants** et leur intersection est la **droite passant par K et parallèle à (GD)** (c'est-à-dire passant par le milieu de [HG]).



Les points A, J, D et G, I, F sont coplanaires, et on montre dans le rectangle ADGF que les droites (IJ) et (GD) sont parallèles.
On a donc (IJ) // (GD) avec (IJ) ⊂ (IJK) et (GD) ⊂ (HDC). D'après le théorème du toit, la droite d'intersection est parallèle à (IJ) et (GD).
Le point K appartient aux deux plans, donc il appartient à leur intersection.



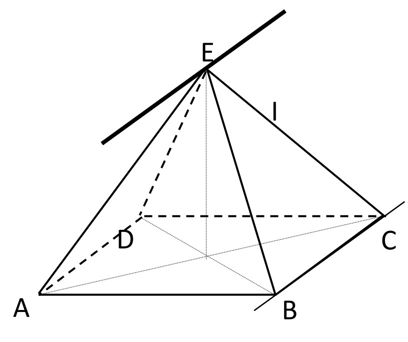
f) (EBI) et (HDC) : **sécants** et leur intersection est **la droite passant par le point d'intersection de (BI) et (GC) et par le point d'intersection de (EI) et (HG).**
(BI) et (GC) sont coplanaires et sécantes, appelons S leur point d'intersection. S appartient donc aux plans (EBI) et (HDC). De même (EI) et (HC) sont coplanaires et sécantes, appelons T leur point d'intersection. T appartient donc aux plans (EBI) et (HDC). Les plans (EBI) et (HDC) sont donc sécants selon la droite (ST).

4) a) Les droites (HJ) et (EA) sont coplanaires, dans le plan de la face ADHE. Elles ne sont pas parallèles (K ∈ (HD) et (HD) // (AE) mais J∉ (HD)). **Donc les droites (HJ) et (EA) sont sécantes.**

b) Les points H, J et E sont coplanaires, dans le plan de la face ADHE. Mais C ∉ (HJE). **Donc les droites (HJ) et (EC) ne sont pas coplanaires**

c) Dans un cube, les faces opposées sont parallèles, donc $(AEH)//(BFG)$. Le plan (AHG) croise les plans (AEH) et (BFG) en (AH) et (GB) donc **les droites $(\boldsymbol{AH})$ et $(\boldsymbol{GB})$ sont parallèles**.

Corrigé Exercice 2



1) (BC) // (AD), donc la droite (BC) est parallèle à tout plan contenant (AD), donc **parallèle au plan (AED)**
On a (IBC) = (EBC). Le point E appartient aux plans (AED) et (IBC), il appartient donc à leur intersection.
Par ailleurs, (AD) // (BC) donc, d'après le théorème du toit, l'intersection de (EAD) et de (IBC) est parallèle aux droite (AD) ou (BC)
Il s'agit donc de la **droite passant par E et parallèle à (BC) [**ou (AD)**]**

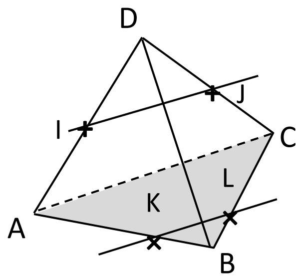
2) a) (JE) ⊥ (EA) et (JE) ⊥ (ED), donc (JE) est orthogonale au plan (AED) et par conséquent à toute droite de ce plan, en particulier, comme (CD) ⊂ (AED), les droites (JE) et (CD) sont orthogonales.

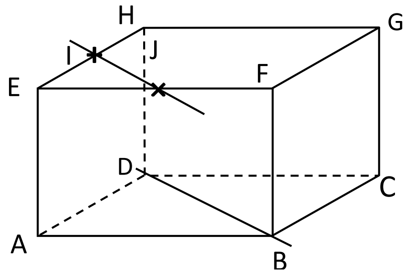
b) (FB) et (HE) sont **non coplanaires**. En effet E n'est pas dans le plan (FBH).

c) (FA) ⊥ (FJ) et (FA) ⊥ (FG), donc (FA) est orthogonale au plan (FGJ) et par conséquent à toute droite de ce plan, en particulier, comme (HI) ⊂ (FGJ), les droites (FA) et (HI) sont orthogonales.

d) (GE) et (BJ) sont sécantes : en effet elles ne sont pas parallèles tout en étant coplanaires, puisque E est dans le plan (BGJ).

3) Dans la face ADC, (IJ) est la droite des milieux et donc parallèle au 3ème côté (AC).
Dans la face (ABC), on a $\frac{BK}{BA} = \frac{1}{3}$ et $\frac{BL}{BC} = \frac{1}{3}$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, la droite (KL) est parallèle à la droite (AC).
Les droites (IJ) et (LK) sont toutes deux parallèles à (AC), et sont donc **parallèles entre elles.**





4) a) On a $(IJ) \subset (HEF)$ et dans le triangle HEF, (IJ) est la droite des milieux parallèle au 3e côté (HF).
Or les droites (HF) et (DB) sont parallèles (intersections des deux plans parallèles (EHF) et (ABD) par le plan (HFD))
Donc (IJ) est parallèle à (BD).

b) (CI) et (FBD) sont sécants.

5) a) Par exemple, on a (EF) // (HG) et (HG) ⊥ (GC) donc **(EF) et (GC) sont orthogonales.**

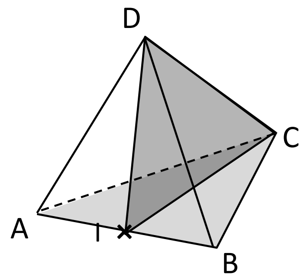
b) (DF) est incluse dans (BFH). En effet, le plan (BFH) passe par les points F et D.

c) (AB) est orthogonale au plan (BFC)*, elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier **(AB) est orthogonale à (CF).**

* Si vous n'en êtes pas convaincus, (AB) ⊥ (FB) et (AB) ⊥ (BC), c'est-à-dire qu'elle est orthogonale à deux droite du plan (FBC), donc orthogonale au plan (FBC)

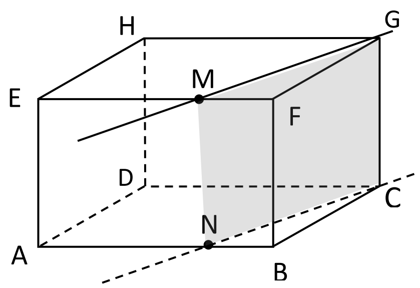
6) a. Les plans (CAD) et (CBE) sont sécants selon la droite (CF). Comme les droites (AD) et (EB) sont parallèles, d'après le **théorème du toit**, la droite d'intersection (CF) leur est aussi parallèle.

7) a) Le tétraèdre est régulier, donc ses 4 faces sont des triangles équilatéraux.
Dans le triangle ABD, la droite (DI) est donc médiane mais aussi hauteur issue de D, et on a (AB) ⊥ (DI).
Dans le triangle ABC, la droite (CI) est donc médiane mais aussi hauteur issue de C, et on a (AB) ⊥ (CI).
Donc la droite (AB) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (CDI), **elle est donc orthogonale à (DIC)**



8) (AB) est orthogonale à (DIC) elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier, **les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.**

b. (GM) est la droite d'intersection des plans (CGM) et (EFG)
(CN) est la droite d'intersection des plans (CGM) et (ABC).
Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles, donc le plan (CGM) les coupent selon des droites parallèles.
On a bien (GM)//(CN)



Corrigé Exercice 3

a) (HD) ⊥ (HE) et (HD) ⊥ (HG), donc (HD) est orthogonale au plan (HEG) qui est le plan (EFG)

b) (HD) est orthogonale à (EFG) elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier, les droites (EG) et (HD) sont orthogonales.

c) (AE) // (HD) et (HD) est orthogonale à (EG) donc (AE) est orthogonale à (EG). Comme les points A, E et G sont coplanaires, AEG est bien un triangle rectangle en E.
D'après le théorème de Pythagore, on a $AG^2 = AE^2 + EG^2$
On peut par ailleurs, calculer EG dans le triangle rectangle EGF,
on a $EG^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ Donc $AG^2 = 1^2 + 2 = 3$ et **AG =** $\boldsymbol{\sqrt{3}}$

À retenir :
La diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\boldsymbol{\sqrt{2}}$
La grande diagonale d'un cube de côté 1 mesure $\boldsymbol{\sqrt{3}}$

Corrigé Exercice 4

1) a) Pour calculer l'aire de DEF, il nous faut calculer FE.
Dans le triangle DEF, on a $DE^2 = DF^2 + FE^2 \Rightarrow FE = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.
Ainsi l'aire de DEF vaut $A_T = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$.
Ainsi l'aire totale de $ABCDEF$ est $\alpha = 2 \times 30 + 12 \times 3 + 13 \times 3 + 5 \times 3 = 60 + 36 + 39 + 15 = 150$.
b) $V = \frac{1}{3} A_T \times DA = 30$.

2) a) Le triangle AID est rectangle en I donc $AD^2 = AI^2 + ID^2 \Rightarrow ID = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
L'aire d'une face du tétraèdre est donc égale à : $A_f = \frac{1}{2} AB \times ID = 4\sqrt{3}$.
b) Le tétraèdre est une pyramide à base triangulaire, donc son volume est donné par :

$$V = \frac{1}{3} A_f \times h \Leftrightarrow \frac{32}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3} 4\sqrt{3}\ h \qquad \Rightarrow h = \frac{3 \times 32}{3\sqrt{2} \times 4\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

3) a) Pour calculer le volume V_P de la pyramide, il faut calculer l'aire de base carrée A_c et sa hauteur EH.
On a d'une part : $A_c = 6^2 = 36$.
D'autre part, dans le triangle rectangle AHB : $AH^2 + HB^2 = AB^2 = 16 \Rightarrow AH^2 = 8 \Rightarrow AH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Dans le triangle rectangle EHA : $AE^2 = EH^2 + HA^2 \Rightarrow 100 = EH^2 + 8 \Rightarrow EH = \sqrt{92} = 2\sqrt{23}$.
Donc enfin :

$$V_P = \frac{1}{3} A_c \times EH = \frac{1}{3} \times 36 \times 2\sqrt{23} = 24\sqrt{23}$$

b) Soit I le milieu de $[AB]$.
Dans le triangle rectangle AIE, on a : $AE^2 = AI^2 + IE^2 \Rightarrow 100 = 9 + IE^2 \Rightarrow IE = \sqrt{91}$.
Ainsi l'aire d'une face triangulaire est :

$$A_f = \frac{1}{2} \times IE \times AB = \frac{1}{2} 6\sqrt{91} = 3\sqrt{91}$$

La surface totale vaut donc :

$$S_P = 36 + 4 \times 3\sqrt{91} = 36 + 12\sqrt{91} = 12\left(3 + \sqrt{91}\right)$$