

Corrigés Savoirs Fle. 3

Corrigé Exercice 11

1) $A = 2$

$B = -3x$

$C = 5x$

D impossible

$E = 1 - 2x$

$F = e^{2x} \times e^{\ln(3)}$
 $F = 3e^{2x}$

$G = 2x + 3$

$H = 1 + 3x$

I impossible

$J = 5x \times (-2x)$
 $J = -10x^2$

2)a)

$2x + 1 = \ln 2$

b)

$3 - x = \ln 3$

c)

$\ln\left(\frac{x}{2}\right) < 0,5x - 5$

d)

$0,1x^2 = \ln(x - 1)$

e) $\ln(e^x(x + 1)) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \ln(e^x)$
 $+ \ln(x + 1)$
 ≥ 0
 $\Leftrightarrow x + \ln(x + 1) \geq 0$

3)a) $2 - x = e^{-4}$

b) $5x \leq e^{2x}$

c) $x - 1 = e^{x+1}$

d) $\frac{1}{x+3} > e^{1-x}$

4) $A = \ln(e^x) - \ln 2 - (x - 3) = x - \ln 2 - x + 3 = 3 - \ln 2$

$B = e^{\ln 6} \times e^{-2 \ln 3} = 6 \times (e^{\ln 3})^{-2} = 6 \times 3^{-2} = \frac{6}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$C = \frac{2x}{\ln(e^x) + \ln(1-x)} = \frac{2x}{x + \ln(1-x)}$

$D = \frac{e^{\ln(2x)-1}}{\ln(2e^{3x})} = \frac{e^{\ln(2x)} \times e^{-1}}{\ln(2) + \ln(e^{3x})} = \frac{2x \times e^{-1}}{\ln(2) + 3x} = \frac{2x}{e(\ln 2 + 3x)}$

I ($\ln e^\heartsuit$) Math
 $\sqrt{16}$ Ever

Corrigé Exercice 12

1) $e^{\alpha-1} = \frac{1}{3e^\alpha} \Leftrightarrow \ln(e^{\alpha-1}) = \ln\left(\frac{1}{3e^\alpha}\right) \Leftrightarrow \alpha - 1 = -\ln(3e^\alpha)$
 $\Leftrightarrow \alpha - 1 = -\ln 3 - \alpha \Leftrightarrow 2\alpha = 1 - \ln 3$ CQFD

2) $1 < \frac{e^x}{x} < e \Leftrightarrow \ln(1) < \ln\left(\frac{e^x}{x}\right) < \ln(e) \Leftrightarrow 0 < \ln(e^x) - \ln(x) < 1$
 $\Leftrightarrow 0 < x - \ln x < 1$ CQFD

3) $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{2x}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{2x}}\right) - \ln(x^2) = -\frac{1}{2x} - 2 \ln x$
 $= \frac{-1-4x \ln x}{2x} = -\frac{1+4x \ln x}{2x}$ CQFD

Un peu plus...

$s^2 - s = \ln\left(\frac{3}{s}\right)$

En passant à l'exponentielle

$e^{s^2-s} = \frac{3}{s} \Leftrightarrow \frac{e^{s^2}}{e^s} = \frac{3}{s}$

$\Leftrightarrow \frac{e^{s^2}}{3} = \frac{e^s}{s} \Leftrightarrow \frac{e^s}{s} = \frac{1}{3} e^{s^2}$

CQFD

Corrigé Exercice 13

Corrigé Partie 1

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - xe^x + 1$

1) $g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$

2) a. On a $g(0) = 2$ et $g(2) \simeq -6$

g est continue et strictement croissante sur $[0 ; 2]$, avec $g(0) > 0$ et $g(2) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; 2]$** (et d'ailleurs sur $[0 ; +\infty[$ vu qu'elle y est strictement décroissante et y change de signe)

b. On a $g(1,278) > 0$ et $g(1,279) < 0$ donc : **$\alpha \simeq 1,28$**

c. On sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \alpha)e^\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha)e^\alpha = -1 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{-1+\alpha}$

3)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	0	-
e^x		+	+
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	\nearrow	2	\searrow

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

Corrigé Partie 2

1) $A'(x) = \frac{4(e^x + 1) - 4xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{4(e^x - xe^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}$

Comme le carré du dénominateur est toujours positif, on a bien $A'(x)$ du même signe que $g(x)$

2)

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-
$A(x)$	\nearrow	$\frac{4\alpha}{e^\alpha + 1}$	\searrow

Corrigé Partie 3

L'aire du rectangle OMPQ est égale à :

$x \times f(x) = \frac{4}{e^x + 1} \times x = A(x)$ où A est la fonction étudiée partie 2.

D'après le tableau de variation de A , **elle admet un maximum en $x = \alpha$** (qui est de $\frac{4\alpha}{e^\alpha + 1}$)

