SAVOIR FC.6 : Analyse algébrique de la convexité

ENTRAÎNEMENT N°1

1) On définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction f par : $f(x) = 2\ln(x) + x^2$

a. Étudier la convexité de la fonction f
b. Existe-t-il des points d'inflexion ? Si oui, déterminer leurs coordonnées.

2) On donne une fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 3{,}5)\,e^{2x}$

On admet que, pour tout réel x, on a $g''(x) = (8x^2 + 4x - 12)\,e^{2x}$

Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction g est au dessus de ses tangentes.

ENTRAÎNEMENT N°2

1) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction B par : $B(x) = x - 1 - x\,e^{-2x}$

Étudier la convexité de la fonction B

2) On donne une fonction p, définie sur $]0\,;5]$. On admet que, pour tout réel x, on a $p''(x) = (5 - 2x)\ln(x)$

a) Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction p est au dessus de ses tangentes.

b) On appelle Δ la tangente à la courbe de p, $\mathcal{C}_p$, au point d'abscisse 1. Déterminer précisément la position relative de Δ et de $\mathcal{C}_p$ au voisinage de $x = 1$

ENTRAÎNEMENT N°3

1) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h par : $h(x) = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 16x + 68$

Étudier la convexité de la fonction h. Existe-t-il des points d'inflexion ?

2) On donne une fonction C, définie sur $\mathbb{R}$ par $C(x) = x\,e^{x}$

On admet que, pour tout réel x, on a $C''(x) = (x + 2)\,e^{x}$

Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction C est en dessous de ses tangentes.

ENTRAÎNEMENT N°4

1) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 8$

Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est-elle concave ?

2) On donne une fonction g, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. On admet que, pour tout réel x, on a $g''(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 12}{x^2}$

a) Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction g est en dessous de ses tangentes.

b) Existe-t-il une valeur de x en laquelle la courbe est traversée par sa tangente en ce point ?

SAVOIR FC.6 : CORRECTION

ENTRAÎNEMENT N°1 - CORRECTION

1) a. $f'(x) = \dfrac{2}{x} + 2x$

$f''(x) = -\dfrac{2}{x^2} + 2 = \dfrac{\mathbf{-2 + 2x^2}}{\mathbf{x^2}} = \dfrac{2(x^2-1)}{x^2} = \dfrac{\mathbf{2(x+1)(x-1)}}{\mathbf{x^2}}$ *(Vous pouvez faire le Δ, mais n'oubliez pas que $b = 0$!)*

x	0		1		$+\infty$
$2x^2 - 2$		$-$	**0**	$+$	
x^2	**0**	$+$	|	$+$	
$f''(x)$	||	$-$	**0**	$+$	
$f(x)$		***Concave***	|	***Convexe***	

f est **concave** sur]0 ; 1] et **convexe** sur [1 ; +∞[.

b. Comme la dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = 1$, la courbe de f y admet un point d'inflexion.
or $f(1) = 2\ln(1) + 1^2 = 1$ donc les **coordonnées du point d'inflexion sont** $(\mathbf{1};\mathbf{1})$

2) $8x^2 + 4x - 12 \Rightarrow \Delta = 400$ et $x_1 = 1$ et $x_2 = -\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-1{,}5$		1		$+\infty$
$8x^2 + 4x - 12$		$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	
e^{2x}		$+$	|	$+$	|	$+$	
$g''(x)$		$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	
$g(x)$		***Convexe***	|	***Concave***	|	***Convexe***	

La fonction *g* est convexe, donc au dessus de ses tangentes, sur les intervalles]−∞ ; −1,5] et [1 ; +∞[

ENTRAÎNEMENT N°2- CORRECTION

1) $B'(x) = 1 - 1 \times e^{-2x} - x \times (-2e^{-2x})$
$\quad = 1 + (-1 + 2x)e^{-2x}$

$B''(x) = 2 \times e^{-2x} + (-1 + 2x) \times (-2e^{-2x})$
$\quad = \mathbf{(4 - 4x)e^{-2x}}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$4 - 4x$		$+$	**0**	$-$	
e^{-2x}		$+$	|	$+$	
$B''(x)$		$+$	**0**	$-$	
$B(x)$		***Convexe***	|	***Concave***	

B est **concave** sur]−∞ ; 1] et **convexe** sur [2 ; +∞[.

2) a)

x	0		1		$2{,}5$		5
$5 - 2x$	|	$+$	|	$+$	**0**	$-$	
$\ln(x)$	||	$-$	**0**	$+$	|	$+$	
$p''(x)$	||	$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	
$p(x)$	||	***Concave***	|	***Convexe***	|	***Concave***	

La fonction *p* est convexe, donc au dessus de ses tangentes, sur l'intervalle [1 ; 2,5]

b) En $x = 1$, la dérivée seconde p'' s'annule et change de signe : il y a donc un point d'inflexion. Avant $x = 1$, la fonction p est concave. Elle est convexe après.
Donc la courbe $\mathcal{C}_p$ et sa tangente Δ se croisent en $x = 1$. Pour $x < 1$, la courbe $\mathcal{C}_p$ est en dessous de Δ et pour $x > 1$, elle est au dessus de Δ.

ENTRAÎNEMENT N°3 – CORRECTION

1) $h'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 108x - 16$ et $h''(x) = \mathbf{12x^2 - 72x + 108}$ $\Rightarrow$ $\Delta = 0$ et $x_0 = \frac{72}{24} = 3$

$\Rightarrow$ Le polynôme est de signe constant, celui de *a* (ici positif)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$h''(x)$		+	**0**	+	
$h(x)$		***Convexe***	|	***Convexe***	

h est **convexe** sur ℝ.
Comme la dérivée seconde s'annule mais ne change pas de signe pour $x = 3$**, la courbe de *h* n'a pas de point d'inflexion**

2)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x + 2$		−	**0**	+	
e^x		+	|	+	
$C''(x)$		−	**0**	+	
$C(x)$		***Concave***	|	***Convexe***	

La fonction *g* est concave, donc en dessous de ses tangentes, sur]−∞ ; −2]

ENTRAÎNEMENT N°4 – CORRECTION

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 8$ donc $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$ et $f''(x) = 6x - 4$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		−	**0**	+	
f		***concave***	|	***convexe***	

***f* est concave sur]−∞ ; $\frac{2}{3}$]**

2) a) $2x^2 - 2x - 12 = 0$ $\Rightarrow$ $\Delta = 100$ et $x_1 = 3$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-2		**0**		**3**	$+\infty$
$2x^2 - 2x - 12$	+	**0**	−	|	−	**0**	+
x^2	+	|	+	**0**	+	|	+
$g''(x)$	+	**0**	−	||	−	**0**	+
$g(x)$	***convexe***	|	***concave***	||	***concave***	|	***convexe***

La fonction *g* est concave, donc en dessous de ses tangentes, sur l'intervalle [−2 ; 0[∪]0 ; 3]

b) Il existe **deux points d'inflexion :** pour $\boldsymbol{x = -2}$ et pour $\boldsymbol{x = 3}$. Pour ces deux valeurs, la dérivée seconde s'annule et change de signe.