

Corrigé Exercice 17

- 1) a. On a $f'(x) = 0$ et $2f(x) + 8 = -8 + 8 = 0$ donc en effet $f' = 2f + 8$.
 f est donc solution de l'équation (E).
- b. Si g est solution de (E_0) alors on a $g'(x) = 2g(x)$.
 f étant solution de (E), on a $f'(x) = 2f(x) + 8$.
 Ainsi on a : $h'(x) = f'(x) + g'(x) = 2f(x) + 8 + 2g(x) = 2(f(x) + g(x)) + 8 = 2h(x) + 8$.
(Autre méthode)
 On a d'une part : $h'(x) = f'(x) + g'(x) = 0 + 2g(x) = 2g(x)$.
 Et d'autre part : $2h(x) + 8 = 2f(x) + 2g(x) + 8 = -8 + 2g(x) + 8 = 2g(x)$
 Donc on a : $h' = 2h + 8$
 Alors h est bien solution de (E).
- c. Les solutions de (E_0) sont de la forme $y = Ke^{2x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
 Les solutions de (E) sont donc de la forme $y = Ke^{2x} + f(x)$ c'est-à-dire $y = Ke^{2x} - 4$.
- 2) a. On a $s'(x) = 1$ et $x - s(x) = x - (x - 1) = 1$ donc en effet $s' = x - s$.
 s est donc solution de l'équation (E).
- b. Si h est solution de (E_0) alors $h'(x) = -h(x)$. Or on a $f(x) = h(x) + s(x)$.
 $\Rightarrow f'(x) = h'(x) + s'(x) = -h(x) + 1$.
 Et $x - f(x) = x - h(x) - s(x) = x - h(x) - (x - 1) = x - h(x) - x + 1 = -h(x) + 1$.
 Ainsi on a bien $f' = x - f$: f est solution de (E).
- c. Les solutions de (E_0) sont de la forme $y = Ke^{2-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
 s étant une solution particulière de (E), les solutions de (E) sont donc de la forme $y = Ke^{2-x} + s(x)$,
 c'est-à-dire $y = Ke^{2-x} + x - 1$.
- d. On a donc $D(x) = Ke^{2-x} + x - 1$ avec $D(1) = 2 \Rightarrow Ke^1 + 1 - 1 = 2 \Rightarrow K = \frac{2}{e}$.
 Ainsi $D(x) = \frac{2}{e}e^{2-x} + x - 1 = 2e^{2-x-1} + x - 1 = 2e^{1-x} + x - 1$. CQFD.

Corrigé Exercice 18

- 1) On a : $u'(t) = 1e^{-0,4t} + t(-0,4e^{-0,4t}) = e^{-0,4t} - 0,4te^{-0,4t}$.
 On a donc : $u'(t) + 0,4u(t) = e^{-0,4t} - 0,4te^{-0,4t} + 0,4te^{-0,4t} = e^{-0,4t}$. Donc u est bien solution de (E).
- 2) a. Si g est solution de l'équation différentielle (H) alors $g'(t) + 0,4g(t) = 0$.
 Or on a : $u'(t) + 0,4u(t) = e^{-0,4t}$.
 On a alors $f'(t) - u'(t) + 0,4(f(t) - u(t)) = 0 \Rightarrow f'(t) + 0,4f(t) - (u'(t) + 0,4u(t)) = 0$
 $\Rightarrow f'(t) + 0,4f(t) - e^{-0,4t} = 0 \Rightarrow f'(t) + 0,4f(t) = e^{-0,4t}$. Alors f est bien solution de (E).
- b. On a : $y' + 0,4y = 0 \Leftrightarrow y' = -0,4y$ donc les solutions de (H) sont de la forme $y = Ke^{-0,4t}$.
- c. u est une solution particulière de (E) donc les solutions de (E) sont de la forme $y = Ke^{-0,4t} + u$, c'est-à-dire $y = Ke^{-0,4t} + te^{-0,4t}$.
- d. f est solution de (E) donc $f(t) = Ke^{-0,4t} + te^{-0,4t}$. On a $f(0) = 1 \Rightarrow K \times 1 + 0 = 1 \Rightarrow K = 1$.
 On a donc $f(t) = e^{-0,4t} + te^{-0,4t} = (1+t)e^{-0,4t}$.

Corrigé Exercice 19

1) On doit avoir : $f'(t) - 0,002f(t) = 0,02 \Rightarrow 0 - 0,002\alpha = 0,02 \Rightarrow \alpha = -10$.

2) g est solution de l'équation (E), donc on a : $g'(t) - 0,002g(t) = 0,02$.

On a donc : $g'(t) = 0,02 + 0,002g(t)$

3) On calcule : $h'(t) - 0,002h(t) = (g(t) + 10)' - 0,002(g(t) + 10) = g'(t) - 0,002g(t) - 0,02$
 $= 0,02 + 0,002g(t) - 0,002g(t) - 0,02 = 0$

Donc h est bien une solution de l'équation différentielle : (E_0) .

4) (E_0) : $y' - 0,002y = 0 \Leftrightarrow y' = 0,002y$.

Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions de la forme $y(t) = Ke^{0,002t}$ où $K \in \mathbb{R}$.

5) Puisque h est solution de (E_0) , on a donc $h(t) = Ke^{0,002t}$.

Or $h(t) = g(t) + 10$ donc $g(t) = h(t) - 10 = Ke^{0,002t} - 10$.

D'autre part, on sait que $g(0) = 22$ donc $Ke^{0,002 \times 0} - 10 = 22 \Rightarrow K = 22 + 10 = 32$.

On a donc au final : $g(t) = 32e^{0,002t} - 10$

6) Dans une minute, il y a 60 s. On calcule donc : $g(60) = 32e^{0,002 \times 60} - 10 \simeq 26,1^\circ\text{C}$.

Au bout d'une minute, la température sera montée à $26,1^\circ\text{C}$.

7) On résout l'inéquation : $32e^{0,002t} - 10 > 86 \Leftrightarrow 32e^{0,002t} > 96 \Leftrightarrow e^{0,002t} > 3 \Leftrightarrow 0,002t > \ln 3$

$\Leftrightarrow t > 500 \ln 3$ C'est donc au bout de 549 s environ, soit 9 minutes et 9 secondes.