Corrections Savoir Fd. 6

Corrigé Exercice 15

1) a) $\boldsymbol{f\,'(x) = 3x^2 + 12x - 15}$

b) $\Delta = 144 + 4\times3\times15 = 324$

$\Rightarrow\ x_1 = \dfrac{-12+18}{6} = 1$ et $x_2 = -5$

c) $\Rightarrow$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
signe $f\,'(x)$		$+$	$\boldsymbol{0}$	$-$	$\boldsymbol{0}$	$+$	
variation $f(x)$		↗	93	↘	-15	↗	

d) avec $f(-5) = (-5)^3 + 6\times(-5)^2 - 15\times(-5) - 7 = 93$
et $f(1) = -15$

2) a) $f\,'(x) = 1 + 0 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$ CQFD

b)

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^2		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f\,'(x)$		$+$	$\boldsymbol{0}$	$-$	$\Vert$	$-$	$\boldsymbol{0}$	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	$\Vert$	↘	10	↗	

3) a) $g'(x) = -4xe^{-2x^2}$ et $g(0) = 1$

b) $g(-2) = e^{-8}$ et $g(1) = e^{-2}$

x	-2		0		1
$-4x$		$+$	0	$-$	
e^{-2x^2}		$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	e^{-8}	↗	1	↘	e^{-2}

4) a) On a : $f'(x) = 6x - 21 - \frac{12}{x} = \frac{6x^2-21x-12}{x}$

D'autre part :

$\frac{3(x-4)(2x+1)}{x} = \frac{3(2x^2-7x-4)}{x} = \frac{6x^2-21x-12}{x}$

On a bien $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{3(x-4)(2x+1)}{x}$

b) $\Rightarrow$

x	1		4		10
$x-4$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$+$	$\vert$	$+$	
x		$+$	$\vert$	$+$	
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15	↘	$-33-12\ln 4$ $\simeq -49{,}6$	↗	$93-12\ln 10$ $\simeq 65{,}4$

Pour préparer le contrôle …

1) a) $\boldsymbol{g\,'(x) = 2x^2 - 12x + 18}$

b) $\Delta = 144 - 144 = 0 \Rightarrow x_0 = \dfrac{12}{4} = 3$

x	0		3		5
signe $g\,'(x)$		$+$	$\boldsymbol{0}$	$+$	
variation $g(x)$	-1		17		$\frac{67}{3}$

avec $g(0) = -1$; $g(3) = \dfrac{2}{3}\times3^3 - 6\times3^2 + 18\times3 - 1 = 17$

et $g(5) = 2\times\frac{5^3}{3} - 6\times5^2 + 18\times5 - 1 = \frac{67}{3}$

2) a) $h\,'(x) = \dfrac{1}{4x^2} + 2 = \dfrac{\boldsymbol{1+8x^2}}{\boldsymbol{4x^2}}$ **CQFD**

b) On a $4x^2 > 0$ pour toutes valeurs de $x \neq 0$.
et $1 + 8x^2 > 0$ car c'est une somme de termes positifs (dont l'un est même strictement positif)

Donc $h'(x) > 0$ pour $x \neq 0$
En particulier, la dérivée est positive sur $]0;+\infty[$ **:**
la fonction $\boldsymbol{h}$ est donc bien croissante sur $]\boldsymbol{0};+\infty[$

(vous pouvez aussi faire un tableau… mais c'est plus fatigant ;-)

3) a) $A'(t) = 10 \times (-0{,}1t + 0{,}8)e^{-0{,}05t^2+0{,}8t}$

$= (-t + 8)e^{-0{,}05t^2+0{,}8t}$

b)

t	0		8		20
$-10t + 80$		$+$	0	$-$	
$e^{-0{,}05t^2+0{,}8t}$		$+$	$\vert$	$+$	
$A'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\mathbf{10}$	↗	$\mathbf{10e^{3{,}2}}$	↘	$\mathbf{10e^{-4}}$

4) a) $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - \frac{2x}{x^2+1} = x - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^3+x-2x}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{x^3-x}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{x(x^2-1)}}{\boldsymbol{x^2+1}}$ CQFD

b)

x	0		1		5
x	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$
$x^2 - 1$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$
$x^2 + 1$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\mathbf{0}$	↘	$\frac{1}{2} - \ln 2$	↗	$\frac{25}{2} - \ln 26$

Corrigé Exercice 16

1) a. $f'(x) = \boldsymbol{2x^3 - 4x^2 - 10x + 12}$

b. On développe : $2(x-3)(x^2+x-2) = 2(x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = \boldsymbol{f'(x)}$ *CQFD*

2) a. Pour $x^2 + x - 2$, on a $\Delta = 9$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$2(x-3)$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$\mathbf{-}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{+}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{+}$	
$f(x)$		↗	$-\frac{73}{3}$	↘	$\frac{43}{6}$	↘	$-\frac{7}{2}$	↗	

Corrigé Exercice 17

1) a. $b'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x^2 - 9)$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$5x^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x^2 - 9$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$b'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$b(x)$		↗	162	↘	0	↘	-162	↗	

pour $x \in [-3\,;\,0]$, la fonction b a pour minimum 0 et pour maximum 162

on a bien $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{b(x)} \leq \mathbf{162}$

Pour préparer le contrôle ...

1) a. $t'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$ CQFD

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$4x$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x^2 - 4$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$t'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$t(x)$		↘	-10	↗	6	↘	-10	↗	

La fonction t admet pour minimum −10 (atteint pour 2 valeurs de x : -2 et 2) ⇒ $\boldsymbol{m = -10}$

On a, pour tout réel x, on a $\boldsymbol{t(x) \geq -10}$

2) a. $f'(x) = 5e^{-0,2x} + (5x-5)\times(-0,2e^{-0,2x})$

$f'(x) = (5 - x + 1)\times e^{-0,2x} = (-x+6)e^{-0,2x}$

CQFD

b.

x	0		6		20
$-x+6$		$+$	0	$-$	
$e^{-0,2x}$		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	↗	$25e^{-1,2}$	↘	$95e^{-4}$

c. Pour $x \in [0; 20]$, la fonction f admet pour maximum $f(6) = 25e^{-1,2} \simeq 7,53$

on a $f(x) \leq 25e^{-1,2}$ et par élargissement $f(x) < 8$

3) a) $h'(x) = \dfrac{\mathbf{1-2x}}{\mathbf{x-x^2}}$

b) $-x^2 + x = x(-x+1)$ donc $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$-2x+1$		$+$	0	$-$	
$-x^2+x$	0	$+$	|	$+$	0
$h'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$h(x)$	||	↗	$\ln\left(\frac{1}{4}\right)$	↘	||

c) $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

D'après le tableau de variation, la fonction h admet **un maximum de** $\mathbf{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$ **en** $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$

2) a. $\phi'(t) = -2te^{1-t^2}$

$\phi(-1) = e^{1-1} = e^0 = 1 = \phi(1)$ et $\phi(0) = e^1 = e$

t	-1		0		1
$-2t$		$+$	0	$-$	
e^{1-t^2}		$+$	|	$+$	
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi(x)$	1	↗	e	↘	1

b. D'après le tableau de variation, pour $t \in [-1; 1]$, la fonction ϕ a pour minimum 1 et pour maximum $e \simeq 2,71$ ⇒ on a donc $1 \leq \phi(t) \leq e$ et par élargissement $1 \leq \phi(t) \leq 3$

3) $g'(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{x^2-9}{x^2}$

x	$-\infty$		-6	-3		-1	0		3		$+\infty$
x^2-9		$+$		0	$-$		|	$-$	0	$+$	
x^2		$+$		|	$+$		|	$+$	|	$+$	
$g'(x)$		$+$		0	$-$		||	$-$	0	$+$	
$g(x)$				0	↗	-4	||	↘	15		

pour $x \in [-6\,;\,-1]$, le minimum de g est -4 et le maximum est 0

⇒ pour $x \in [-6\,;\,-1]$, on a $-4 \leq g(x) \leq 0$

ce qui revient à dire que $\boldsymbol{g(x)} \in [\mathbf{-4}\,;\,\mathbf{0}]$

Corrigé Exercice 18

1) OUI À partir de la courbe on peut avoir le tableau de variation de *f* et donc le tableau de signe de *f'*
En comparant avec la seconde courbe, la fonction dérivée semble bien correspondre : positive sur [−2 ; 0] et sur [4 ; 6] et négative sur [0 ; 4]…

x	-2		0		4		6
$f(x)$	$-1{,}5$	↗	2	↘	-2	↗	2
$f'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

2) Question 1 – **Réponse B**

D'après la représentation graphique de g, elle est croissante sur $[-2; 0]$ et $[4; 6]$ et décroissante sur $[0; 2]$. Sa dérivée g' doit donc être positive sur $[-2; 0]$ et $[4; 6]$ et négative sur $[0; 2]$.

Question 2 – **Réponse D**

C'est le nombre de point d'intersection de la courbe de g avec l'axe des abscisses…

Question 3 – **Réponse C**

Cette fois c'est le nombre de tangentes horizontales de la courbe de g (ou le nombre d'intersection de la courbe de g' avec l'axe des abscisses sur le graphique de la réponse B de la question 1) …