

Sujet n°4 : Des moins typiques et plus durs

Exercice 1 - Centres étrangers 2024

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{0,96x}{0,93x + 0,03}$$

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

$$f'(x) = \frac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2}$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

Partie B

La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites.

Lors d'une compétition rassemblant 1 000 sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents.

On propose d'étudier la fiabilité de ce test.

On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.

Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96;
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à 0,03.

On note :

- D l'évènement : « le sportif est dopé ».
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :

2. Déterminer, en fonction de x , la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.

3. Démontrer que la probabilité de l'évènement T est égale à $0,93x + 0,03$.

4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les 1 000 testés.

La fonction f désigne la fonction définie à la partie A.

Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0,05)$.

En donner une valeur arrondie au centième.

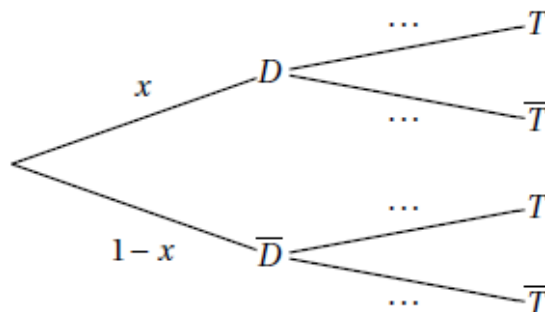
5. On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.

a. Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9. Arrondir le résultat au centième.

b. Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés.

Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test ?

Argumenter en utilisant un résultat de la partie A.



Exercice 2 - Polynésie 2025

Deux avions sont en approche d'un aéroport.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'origine O est le pied de la tour de contrôle, et le sol est le plan P_0 d'équation $z = 0$.

L'unité des axes correspond à 1 km.

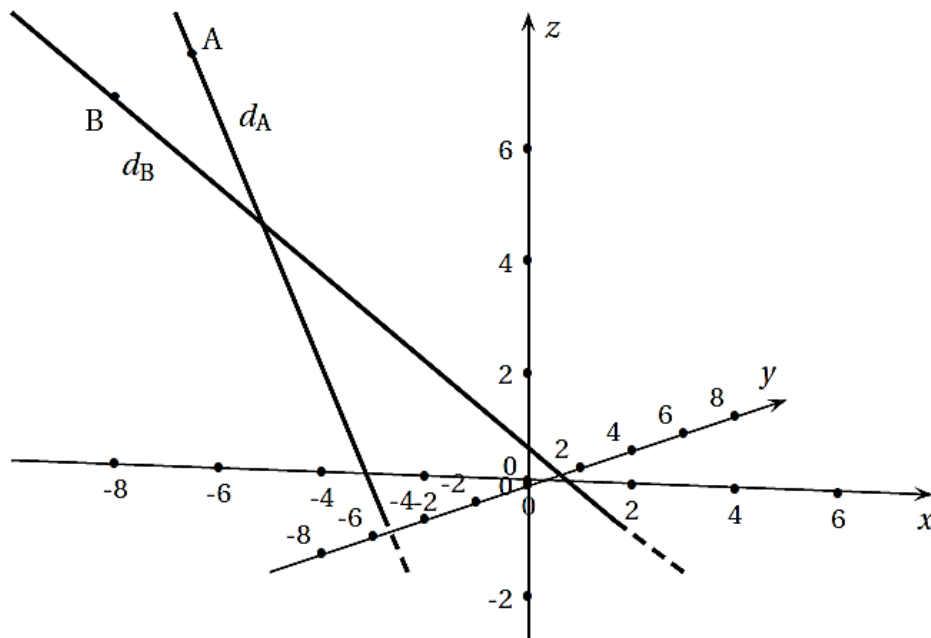
On modélise les avions par des points.

L'avion Alpha transmet à la tour sa position en $A(-7 ; 1 ; 7)$ et sa trajectoire est dirigée

par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

L'avion Bêta transmet une trajectoire définie par la droite d_B passant par le point B dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -5 + t \\ z = 11 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$



1. S'il ne dévie pas de sa trajectoire, déterminer les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol.

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_A caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha.

b. Les deux avions peuvent-ils entrer en collision?

3. a. Démontrer que l'avion Alpha passe par la position $E(-3 ; -1 ; 1)$.

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan P_E passant par E et perpendiculaire à la droite d_A est :

$$2x - y - 3z + 8 = 0.$$

c. Vérifier que le point $F(-1 ; -3 ; 3)$ est le point d'intersection du plan P_E et de la droite d_B .

d. Calculer la valeur exacte de la distance EF , puis vérifier que cela correspond à une distance de 3 464 m, à 1 m près.

4. La réglementation aérienne stipule que deux avions en approche doivent être à tout instant à au moins 3 milles nautiques l'un de l'autre (1 mille nautique vaut 1 852 m).

Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, leur distance de sécurité est-elle respectée?

Exercice 3 - Métropole 2024

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a .

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$

2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.

a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n < 2$.

b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. On donne ci-contre la fonction u écrite en langage Python.

Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit $u(2,1)$ et $u(2,2)$ dans la console Python.

```
def u(a,n) :  
    u=a  
    for k in range(n) :  
        u=u**2-2*u+2  
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$?

On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a .

b. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 1 + e^{2^n \times \ln(a-1)}$$

2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4 - Métropole 2024

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $] - 2 ; +\infty[$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

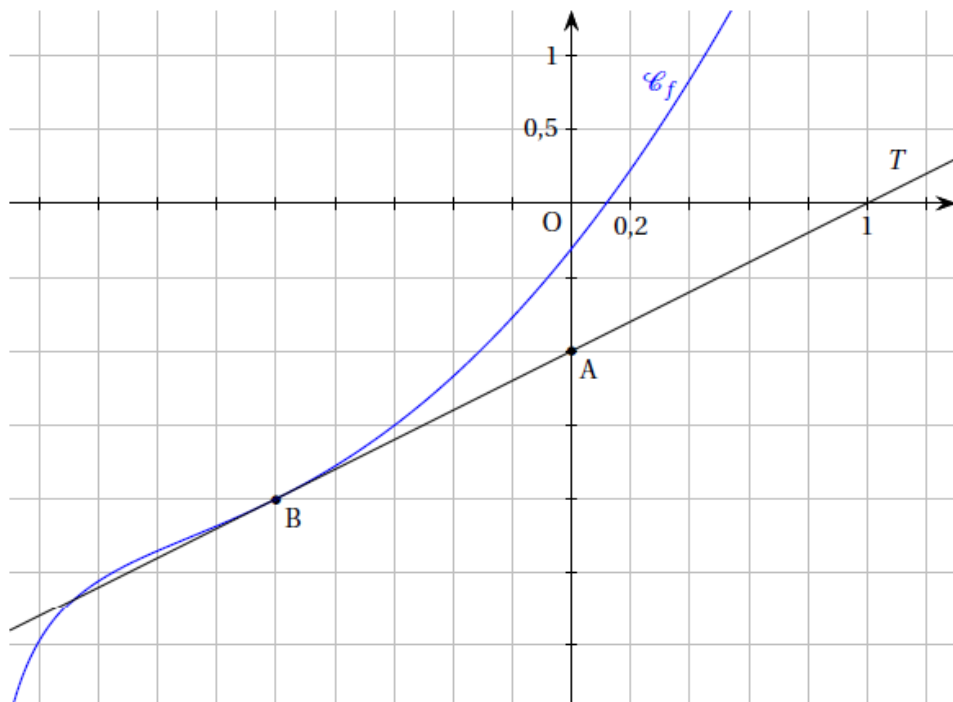
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1 .

On précise que la droite T passe par le point $A(0 ; -1)$.

Partie A : exploitation du graphique

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.



Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $] - 2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. (...)
2. Montrer que pour tout $x > -2$,

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur $] - 2 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] - 2 ; +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $] - 2 ; +\infty[$.
6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $] -2 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x + 2)$.

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représentée ci-contre.

Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x .

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $] -2 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = JM^2$$

1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a :

$$h(x) = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2.$$

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $] -2 ; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x + 2}$$

où f est la fonction étudiée en partie B.

a. Dresser le tableau de variations de h sur $] -2 ; +\infty[$.

b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.

3. On notera M_α le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse α .

a. Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$

b. En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1 .

