

Exercices type bac

Entraînement 1

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. L'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0; 25]$ est :

$$B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100.$$

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B .

Calculer $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 25]$.

2. On admet que $B'(x) = -3(x - 3)(x - 17)$. Justifier le tableau suivant :

x	0	3	17	25	
signe de $B'(x)$	-	0	+	0	-

3. En déduire le tableau de variations **complet** de la fonction B sur l'intervalle $[0; 25]$.

4. Déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal ?

Entraînement 2

Une entreprise produit et vend du safran, une épice de grande qualité.

On note x le nombre de kilogrammes que produit et vend l'entreprise en un an, x étant compris entre 0 et 10.

Le montant des charges correspondant à la production de x kilogrammes de safran, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = 2x^3 - 23x^2 + 90x + 10.$$

L'entreprise vend la totalité de sa production. Chaque kilogramme de safran est vendu au prix de 50 milliers d'euros.

1. Déterminer le chiffre d'affaires $R(x)$, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x kilogrammes de safran.

2. Vérifier que le bénéfice $B(x)$, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x kilogrammes de safran est :

$$B(x) = -2x^3 + 23x^2 - 40x - 10.$$

3. On note B' la fonction dérivée de la fonction B .

a. Calculer $B'(x)$.

b. Montrer que, pour toute valeur de x , on a $B'(x) = (-2x + 2)(3x - 20)$

c. Dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0; 10]$.

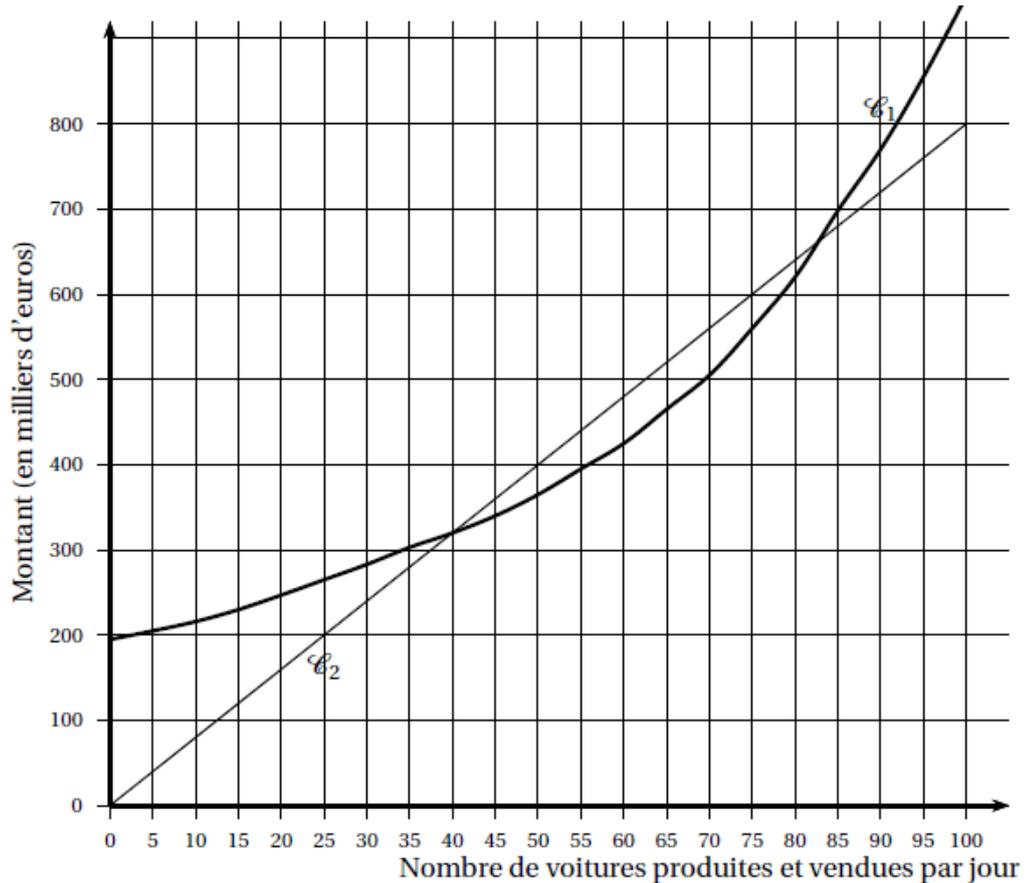
d. Quelle quantité de safran l'entreprise doit-elle vendre pour réaliser le bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal, arrondi au millier d'euros ?

Entraînement 3

Une usine de fabrication de voitures a une capacité de production de 100 véhicules par jour.

Partie A : Étude graphique

Sur le graphique ci-contre sont tracées deux courbes C_1 et C_2 . L'une représente le coût de production en fonction du nombre de voitures produites et vendues par jour, l'autre le chiffre d'affaires de l'usine en fonction du nombre de voitures produites et vendues par jour.



1. Sachant que le chiffre d'affaires de l'usine est proportionnel au nombre de voitures produites et vendues chaque jour, laquelle des deux courbes représente ce chiffre d'affaires ?

2. Avec la précision permise par le graphique, donner le coût de production de 55 voitures.

3. Combien de voitures faut-il produire et vendre pour réaliser un chiffre d'affaires de 600 000 euros ?

4. Pour combien de voitures produites et vendues par jour l'usine réalise-t-elle un bénéfice? Le résultat sera donné sous forme d'un intervalle.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction R définie sur $[0; 100]$ par :

$$R(x) = -0,001x^3 + 0,07x^2 + 3,36x - 186.$$

On admet que la fonction R est dérivable sur $[0; 100]$. On note R' sa fonction dérivée.

1. Calculer $R'(x)$.

2. On donne le tableau de signe de la dérivée R' :

x	$-\infty$	$\simeq -17,5$	$\simeq 64,1$	$+\infty$	
$R'(x)$	-	0	+	0	-

En déduire le tableau de variation de la fonction R sur $[0; 100]$.

3. On appelle *résultat* la différence entre le chiffre d'affaires et le coût de production. S'il est positif, il correspond à un bénéfice, s'il est négatif, il correspond à une perte. Pour un nombre entier x de voitures produites et vendues par jour, on modélise le *résultat* par $R(x)$.

a. Selon ce modèle, combien de voitures l'usine doit-elle produire et vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal.

b. Quel est alors ce bénéfice?

Entraînement 4

Une entreprise française commercialise des pneus. La production mensuelle maximale est de 30 000 pneus. On suppose que la totalité de la production mensuelle est vendue chaque mois.

Les charges de production, en milliers d'euros, pour x milliers de pneus vendus sont données par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 30]$ par

$$C(x) = 4x^2 + 4x + 574.$$

L'entreprise fixe le prix de vente d'un pneu à 130 euros.

Le chiffre d'affaires, en milliers d'euros, pour la vente de x milliers de pneus est donné par la fonction R définie sur l'intervalle $[0; 30]$ par

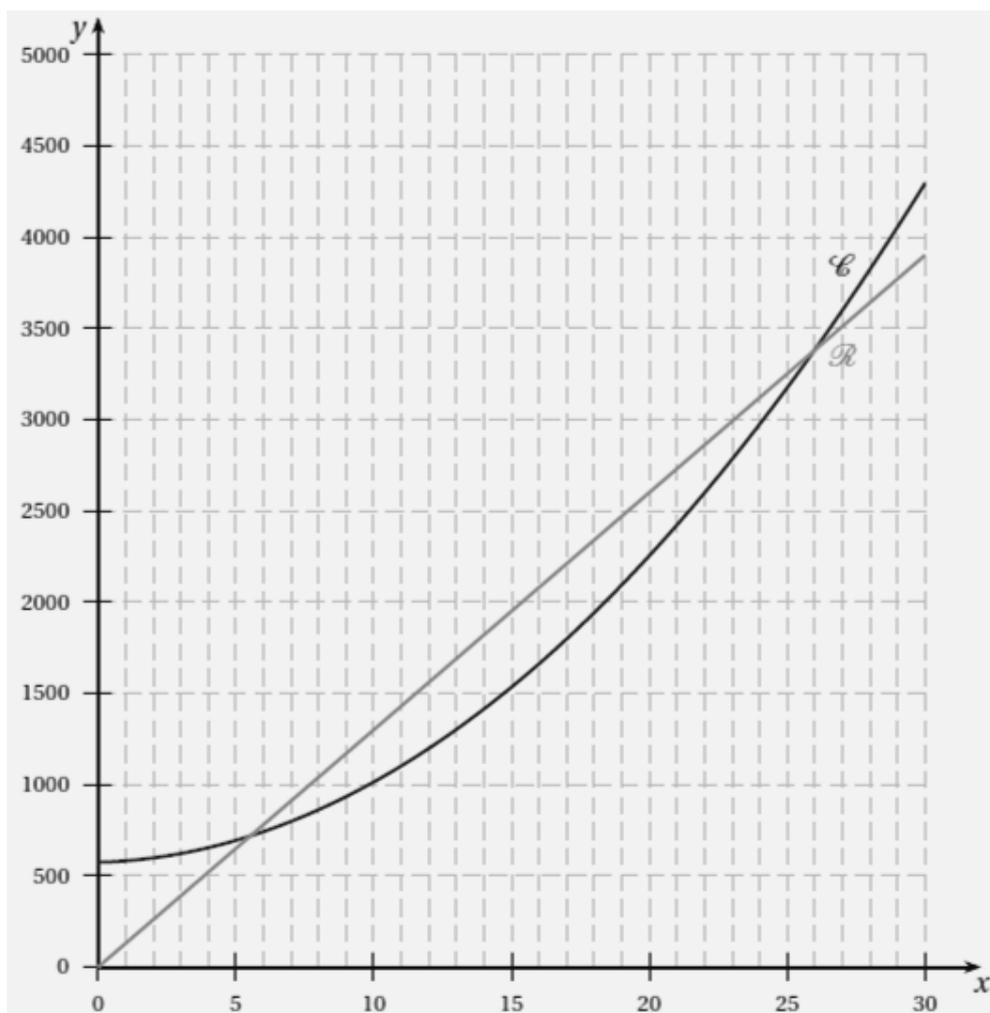
$$R(x) = 130x.$$

\mathcal{R} et \mathcal{C} désignent leurs courbes représentatives. Les deux courbes sont représentées sur le graphique donné ci-dessous.

1. Déterminer, par la méthode de votre choix (calcul ou graphique) :

- les charges de production de 12 000 pneus.
- le nombre de pneus à produire pour obtenir un chiffre d'affaires 2 500 000 euros.

2. En vendant 4 000 pneus, l'entreprise est-elle bénéficiaire? Justifier votre réponse.



3. Le bénéfice réalisé pour x milliers de pneus vendus est donné par la fonction B , définie pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[0; 30]$, par :

$$B(x) = -4x^2 + 126x - 574.$$

- On désigne par B' la fonction dérivée de la fonction B . Calculer $B'(x)$.
- Déterminer le signe de la fonction B' sur l'intervalle $[0; 30]$.
- En déduire le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0; 30]$.
- Pour quel nombre de pneus produits le bénéfice est-il maximal? Quel est le montant de ce bénéfice?

Corrections Type bac

Corrigé Entraînement 1

1. $B'(x) = -3x^2 + 30 \times 2x - 153 \times 1 - 0 = -3x^2 + 60x - 153$

2. $B'(x) = -3(x - 3)(x - 17)$

Pour $x - 3$ croissante avec $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $x - 17$ croissante avec $x - 17 = 0 \Leftrightarrow x = 17$

Donc

x	0	3	17	25
-3	-		-	-
$x - 3$	-	0	+	+
$x + 17$	-		-	0
$B'(x)$	-	0	+	0

3. On calcule : $B(0) = -153$; $B(3) = -316$; $B(17) = 1056$ et $B(25) = -800$. Donc on obtient :

x	0	3	17	25
$B'(x)$	-	0	+	0
$B(x)$	-153	-316	1056	-800

4. Le bénéfice est maximal pour une production de 17 pièces par jour. Il s'élève alors à 1056 €.

Corrigé Entraînement 2

1. 1 kg est vendu 50 milliers d'euros donc le chiffre d'affaires (total des ventes) pour un nombre x de kilogrammes est donné par : $R(x) = 50 \times x = 50x$.

2. On a « Bénéfice = Chiffre d'affaires - Charges », donc ici :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 50x - (2x^3 - 23x^2 + 90x + 10)$$

$$\Rightarrow B(x) = 50x - 2x^3 + 23x^2 - 90x - 10 = -2x^3 + 23x^2 - 40x - 10. \text{ CQFD}$$

3. a. $B'(x) = -2 \times 3x^2 + 23 \times 2x - 40 \times 1 - 0 = -6x^2 + 46x - 40$.

b. on a $(-2x + 2)(3x - 20) = -6x^2 + 40x + 6x - 40 = -6x^2 + 46x - 40 = B'(x)$ CQFD

c.

x	0	1	$\frac{20}{30}$	10
$-2x + 2$	+	0	-	-
$3x - 20$	-		-	0
$B'(x)$	-	0	+	0
$B(x)$	-10	-29	153	-110

d. Il faut donc vendre environ 6,7 kg de safran pour un bénéfice maximal de 153 000 €.

Corrigé Entraînement 3

Partie A

1. La proportionnalité est représentée graphiquement par une droite. C'est donc C_2 qui représente le chiffre d'affaires.
2. Le coût de production de 55 voitures est d'environ 400 000 €.
3. Pour un CA de 600 000 €, il faut produire et vendre environ 75 voitures.
4. Il y a bénéfice lorsque le CA est strictement supérieur au coût de production, donc pour une production de 41 à 82 voitures environ (intervalle $[41 ; 82]$).

Partie B

1. $R'(x) = -0,001 \times 3x^2 + 0,07 \times 2x + 3,36 \times 1 - 0 = -0,003x^2 + 0,14x + 3,36$.

2.

x	0	$\approx 64,1$	100
$R'(x)$	+	0	-
$R(x)$	≈ -186	$\nearrow \approx 53,6$	$\searrow -150$

3. a. Le bénéfice maximal est donc obtenu pour une production de 64 voitures.
- b. Ce bénéfice maximal est de 53 600 € environ.

Corrigé Entraînement 4

1. a. Graphiquement, on constate que les charges de production de 12 000 pneus s'élèvent à environ 1 200 000 €.
- b. Pour obtenir un chiffre d'affaires de 2 500 000 €, il faut produire environ 19 200 pneus.
2. En vendant 4 milliers de pneus, la courbe des coûts étant au-dessus de celle des recettes, l'entreprise est déficitaire.
3. a. $B'(x) = -4 \times 2x + 126 \times 1 - 0 = -8x + 126$.

b. B' est décroissante, avec $-8x + 126 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-126}{-8} = 15,75$.

x	0	15,75	30
$B'(x)$	+	0	-

c. On calcule : $B(0) = -574$; $B(15,75) = 418,25$ et $B(30) = -394$. On obtient donc :

x	0	15,75	30
$B(x)$	-574	\nearrow 418,25 \searrow	-394

- d. Le bénéfice est maximal pour 15 750 pneus produits et le montant du bénéfice est alors de 418 250 €.