

8. Centres Etrangers - juin 2025

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

On considère les points $A(1; 0; 3)$, $B(-2; 1; 2)$ et $C(0; 3; 2)$.

1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC) .

c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x + y + 4z - 11 = 0$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x - 3y + 2z - 9 = 0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

2. a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.

b. Déterminer si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.

3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Montrer que le point $M(2; 1; 3)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

En déduire une représentation paramétrique de la droite (d) .

5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC) .

Que peut-on dire des trois plans (ABC) , $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?

9. Polynésie - juin 2025

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points suivants : $A(1; 3; 0)$, $B(-1; 4; 5)$, $C(0; 1; 0)$ et $D(-2; 2; 1)$.

1. Montrer que les points A , B et C déterminent un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) .

b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne : $2x - y + z + 1 = 0$.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

4. On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) .

5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.

a. Montrer que $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

6. On considère la droite d de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -3k \\ z = 1 + k \end{cases}$ où k décrit $\mathbb{R}$.

La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles?