Corrections Savoir Sd. 2

Correction Exercice 6

1) a. $P(x) = -2x^2 - x + 3$
On a $\Delta = 1 + 24 = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{1-5}{-4} = 1$ et $x_2 = \frac{1+5}{-4} = -\frac{3}{2}$
Alors $P(x) = -2(x-1)\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right) = \boldsymbol{-2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}$
On pourrait distribuer le – et le 2 et obtenir $P(x) = (1-x)(2x+3)$

b. $Q(x) = 5x^2 - 4x + 3$
On a $\Delta = 16 - 60 = -44 \Rightarrow$ **Pas de factorisation possible**

c. $R(x) = x^2 + x - 1$ Attention à l'ordre des facteurs
On a $\Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
Alors $R(x) = \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \boldsymbol{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$

d. $S(t) = 16t^2 - 24t + 9$
On a $\Delta = 576 - 576 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$
Alors $S(t) = \boldsymbol{16\left(t - \frac{3}{4}\right)^2}$
On pourrait distribuer le 16 et obtenir $S(t) = (4t-3)^2$

a. $F(x) = \frac{x^2}{4} - x - 2$
On a $\Delta = 1 + 4 \times \frac{1}{4} \times 2 = 3$
$\Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2\times\frac{1}{4}} = 2 - 2\sqrt{3}$
et $x_2 = 2 + 2\sqrt{3}$
$F(x) = \boldsymbol{\frac{1}{4}(x - 2 + 2\sqrt{3})(x - 2 - 2\sqrt{3})}$

b. $G(x) = -x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{5}{2}$
On a $\Delta = \frac{81}{4} + 4 \times \frac{5}{2} = \boldsymbol{\frac{121}{4}}$
$\Rightarrow x_1 = \frac{\frac{9}{2} - \frac{11}{2}}{-2} = -\frac{2}{2} \div (-2) = \frac{1}{2}$
et $x_2 = \frac{\frac{9}{2} + \frac{11}{2}}{-2} = \frac{20}{2} \div (-2) = -5$
Alors $G(x) = -\boldsymbol{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+5)}$
Ou $G(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)(x+5)$

e. $T(x) = 5x^2 - 2x$ (ça serait bien plus rapide autrement, par factorisation naturelle…)
On a $\Delta = 4 - 0 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{2-2}{10} = 0$ et $x_2 = \frac{2+2}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ Alors $T(x) = \boldsymbol{5x\left(x - \frac{2}{5}\right)}$
On pourrait distribuer le 5 et obtenir $T(x) = x(5x-2)$ comme la factorisation directe par x

f. $U(n) = -n^2 + 3n - 2$ Attention à l'ordre des facteurs
On a $\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow n_1 = \frac{-3-1}{-2} = 2$ et $n_2 = \frac{-3+1}{-2} = 1$ Alors $U(n) = \boldsymbol{-(n-1)(n-2)}$
On pourrait distribuer le – et obtenir par ex $U(n) = (1-n)(n-2)$

2) a. $A(x) = \boldsymbol{(2x+3)(2x-3)}$: c'est un $a^2 - b^2$ **b.** $B(x) = \boldsymbol{3x(2x+1)}$

c. $C(x) = (5x+1)^2$ c'est un $a^2 + 2ab + b^2$ on obtiendrait un $\Delta = 0$ et une factorisation $5\left(x + \frac{1}{5}\right)^2$

d. $D(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$: c'est un $a^2 - b^2$ (et ça évite des simplifications de racines pas simples)

Correction Exercice 7

$A(x) = x^2 - 4x + 9$: On a $x_0 = \frac{4}{2} = 2$ et $A(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 9 = 5$
Alors $\boldsymbol{A(x) = 1(x-2)^2 + 5}$

$B(t)$: On a $t_0 = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$ et $B\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = 2 \times \frac{9}{4} - 9 - 1 = \frac{9}{2} - 10 = -\frac{11}{2}$
Alors $\boldsymbol{B(t) = 2\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}}$

$C(x) = 3x^2 + 18x + 30$ On a $x_0 = \frac{-18}{6} = -3$ et $C(-3) = 3 \times (-3)^2 + 18 \times (-3) + 30 = 3$
Alors $\boldsymbol{C(x) = 3(x+3)^2 + 3}$

$D(x) = 16x^2 - 24x + 9$
On a $x_0 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$
et $D\left(\frac{3}{4}\right) = 16 \times \frac{9}{16} - 24 \times \frac{3}{4} + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$
Alors $\boldsymbol{D(x) = 16\left(x - \frac{3}{4}\right)^2}$
Il s'agit d'un carré parfait quand l'image de x_0 est 0.
La forme factorisée est aussi la forme canonique : on aurait alors plutôt trouvé $(4x-3)^2$

$E(x) = \boldsymbol{-3x^2 + 7}$
C'est déjà une forme canonique : $x_0 = 0$ et $E(0) = 7$

$P(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{9}{2}$
On a $x_0 = \frac{1}{2\times\frac{1}{2}} = 1$ et $P(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{9}{2} = 4$
Alors $\boldsymbol{P(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 4}$

$Q(x) = \frac{2}{3}x^2 - 5x$
On a $x_0 = \frac{5}{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)} = 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{15}{4}$
et $Q\left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{225}{16} - 5 \times \frac{15}{4} = -\frac{75}{8}$
Alors $\boldsymbol{Q(x) = -\frac{2}{3}\left(x + \frac{15}{4}\right)^2 - \frac{75}{8}}$

Correction Exercice 8

$A = 2x^2 + 2x - 24 - (x-3)(x+1)$
1ère méthode : on factorise la 1ère partie

On a $2x^2 + 2x - 24 = 2(x-3)(x+4)$ car $\Delta = 196$; $x_1 = 3$ et $x_2 = -4$
Donc $A = 2(x-3)(x+4) - (x-3)(x+1) = (x-3)\big(2(x+4) - (x+1)\big)$
$= (x-3)(2x+8-x-1) = \boldsymbol{(x-3)(x+7)}$

2ème méthode : on développe avant de factoriser

$A = 2x^2 + 2x - 24 - (x^2 + x - 3x - 3) = 2x^2 + 2x - 24 - x^2 - x + 3x + 3 = \boldsymbol{x^2 + 4x - 21}$
On a $\Delta = 100$; $x_1 = 3$ et $x_2 = -7$ donc $A = \boldsymbol{(x-3)(x+7)}$

$B = (2x-1)^2 + 2x^2 + 11x - 6$

On a $2x^2 + 11x - 6 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+6) = (2x-1)(x+6)$ car $\Delta = 169$; $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -6$
Donc $B = (2x-1)^2 + (2x-1)(x+6) = (2x-1)(2x-1+x+6) = \boldsymbol{(2x-1)(3x+5)}$

$C = 4x^2 - 2x + 1 + 2(1-x)(x+2)$

$C = 4x^2 - 2x + 1 + 2(x + 2 - x^2 - 2x) = 4x^2 - 2x + 1 + 2x + 4 - 2x^2 - 4x = 2x^2 - 4x + 5$
On a $\Delta = -24$ ce n'est pas factorisable…

$D = x^2 + 6x - 7 - x(14 - x^2 - 5x)$

Pour $x^2 + 6x - 7$, on a $\Delta = 64$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -7$ donc $x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7)$
Pour $-x^2 - 5x + 14$, on a $\Delta = 81$; $x_1 = -7$ et $x_2 = 2$ donc $-x^2 - 5x + 14 = -(x+7)(x-2)$
$D = (x-1)(x+7) - x\big(-(x+7)(x-2)\big) = (x+7)\big(x - 1 + x(x-2)\big) = (x+7)(x^2 - x - 1)$
Essayons encore de factoriser $x^2 - x - 1$ avec $\Delta = 5$; $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Au final : $\boldsymbol{D = (x+7)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$

Correction Exercice 9

1) $P(1) = -3 + 12 - 3 - 18 = 0$ On a bien -1 racine de P

2) $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c$

Or $P(x) = -3x^3 + 12x^2 - 3x - 18$ on peut identifier $\begin{cases} a = -3 \\ b + a = 12 \\ c + b = -3 \\ c = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b - 3 = 12 \\ -18 + b = -3 \\ c = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = -3} \\ \boldsymbol{b = 15} \\ \boldsymbol{b = 15} \\ \boldsymbol{c = -18} \end{cases}$

On a $\boldsymbol{P(x) = (x+1)(-3x^2 + 15x - 18)}$

3) Pour $-3x^2 + 15x - 18$, on a $\Delta = 9$; $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$ donc $\boldsymbol{P(x) = -3(x+1)(x-2)(x-3)}$

Correction Exercice 10

$$A = \frac{2x^2 + x - 3}{4x + 6}$$

Pour $2x^2 + x - 3 \Rightarrow \Delta = 25$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{3}{2}$

Donc :

$$A = \frac{2x^2 + x - 3}{4x + 6} = \frac{2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)}{4\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \boldsymbol{\frac{x-1}{2}}$$

$$B = \frac{x - 5}{-2x^2 + 6x + 20}$$

Pour $-2x^2 + 6x + 20 \Rightarrow \Delta = 196$; $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$ Donc :

$$B = \frac{x - 5}{-2(x+1)(x-5)} = \boldsymbol{\frac{1}{-2(x+1)}}$$

$$C = \frac{-x^2 + 3x - 2}{-x^2 + 3x - 3}$$

Pour $-x^2 + 3x - 2 \Rightarrow \Delta = 1$; $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

Pour $-x^2 + 3x - 3 \Rightarrow \Delta = -3$ est donc non factorisable

$$C = \boldsymbol{\frac{-(x-1)(x-2)}{-x^2 + 3x - 3}}$$

$$D = \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9}$$

Pour $2x^2 + 2x - 24 \Rightarrow \Delta = 196$; $x_1 = 3$ et $x_2 = -4$

Et $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ (identité remarquable)

Donc

$$D = \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9} = \frac{2(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+3)} = \boldsymbol{\frac{2(x+4)}{x+3}}$$