

Corrections Sujets bac

Sujet n°1 - CORRECTIONS

Partie A

1. $u'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$

Donc, pour $x > 0$, on a $u'(x) > 0$ et par conséquent, la fonction u est **strictement croissante sur** $]0; +\infty[$.

2. On a $u(2) = \ln 2 - 1 < 0$ et $u(3) = \ln 3 > 0$

Or, u est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc, comme $0 \in [u(2); u(3)]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α et $\alpha \in [2; 3]$

3.

x	0	α	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+

Partie B

2. a. $f'(x) = \frac{1}{x^2} [\ln(x) - 2] + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{\ln x + x - 3}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}$

b.

x	0	α	$+\infty$
$u(x)$	-	0	+
x^2	+		+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Partie C

1. $f(x) - \ln(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2 - \ln x = \ln x - 2 - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + 2 - \ln x = \frac{-\ln x + 2}{x}$ CQFD

Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un point commun quand $f(x) = \ln x \Leftrightarrow f(x) - \ln x = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{x} = 0$

$\Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

On a alors $f(e^2) = \ln(e^2) = 2$

Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ n'ont qu'un seul point commun de coordonnées $M(e^2; 2)$

Sujet n°2 - CORRECTIONS

1. $f(-1) = -1 + 1 - \frac{1}{e^{-1}} = -\frac{1}{e^{-1}} = -e$; $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{e^1} = 2 + \frac{1}{e}$

2. a. $g'(x) = -1 + e^x$ or $-1 + e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$

On a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

b. D'après la question précédente, on a $g(x) \geq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc, la fonction g est **strictement positive sur** $\mathbb{R}$

3. $f'(x) = 1 + \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x + 1 - x}{e^x} = e^{-x}(1 - x + e^x) = e^{-x}g(x)$

CQFD

4.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
e^{-x}			+	
$g(x)$			+	
$f'(x)$			+	
$f(x)$		$-e$	1	

5. a. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$.
Donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

À la calculatrice, on trouve : $-0,5 < \alpha < -0,4$

b.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

6. a. D'après les questions précédentes, on a $f(0) = 1$ et $f'(0) = e^{-0}g(0) = 1 \times (1 - 0 + e^0) = 2$
Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x + 1 \quad \text{CQFD}$$

b. $f(x) - (2x + 1) = x + 1 + \frac{x}{e^x} - 2x - 1 = -x + xe^{-x} = x(e^{-x} - 1)$

Or on a $e^{-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq 1 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$e^{-x} - 1$	+	0	-
$f(x) - (2x + 1)$	-	0	-

La courbe $\mathcal{C}$ est toujours en dessous de la droite T et leur seule point de contact est en $x = 0$

Sujet n°3 - CORRECTIONS

1. On a $b \geq 2$.

$$\text{Et } -bx + b - 2 = 0 \Leftrightarrow -bx = -b + 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b+2}{-b} = 1 - \frac{2}{b}$$

Et comme $b \geq 2$ on a $\frac{2}{b} \leq 1$ et $0 \leq 1 - \frac{2}{b} \leq 1$

Donc, on a le tableau de signe :

x	0	$1 - \frac{2}{b}$	1
$-bx + b - 2$	+	0	-
$1 - x$	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0 ↗	$f\left(1 - \frac{2}{b}\right)$	↘

$$\text{Avec } f\left(1 - \frac{2}{b}\right) = b\left(1 - \frac{2}{b}\right) + 2 \ln\left(1 - \left(1 - \frac{2}{b}\right)\right) = \mathbf{b - 2 + 2 \ln\left(\frac{2}{b}\right)}$$

La fonction f a bien pour maximum $b - 2 + 2 \ln\left(\frac{2}{b}\right)$ en $x = 1 - \frac{2}{b}$

2. On pose pour la valeur du maximum, dépendant de b , la fonction m définie par $m(b) = b - 2 + 2 \ln\left(\frac{2}{b}\right)$

$$\text{On a alors } m'(b) = 1 + 2 \times \frac{\frac{2}{b^2}}{\frac{2}{b}} = 1 + 2 \left(-\frac{2}{b^2}\right) \times \left(\frac{b}{2}\right) = 1 - \frac{2}{b}$$

et on a déjà vu que $1 - \frac{2}{b} \in [0; 1]$

Donc la fonction m est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

Elle est aussi continue et on a $m(2) = 0 < 1,6$ et $m(6) \simeq 1,8 > 1,6$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $m(b) = 1,6$ admet une unique solution $b_0 \in [2; 6]$.

On trouve une approximation à la calculatrice $b_0 \simeq 5,7$

Donc pour $2 \leq b \leq b_0$ le maximum $m(b)$ est inférieur à 1,6

b	2	b_0	$+\infty$
$m'(b)$	+		+
$m(b)$	0	↗	

3. On détermine une équation de la tangente à la courbe en 0 :

$$y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow y = (5,69 - 2)x + 0 \Leftrightarrow \mathbf{y = 3,69x}$$

On a alors : $\tan \theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ où les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de cette tangente.

Donc, avec les points $O(0; 0)$ et $A(1; 3,69)$ on a alors : $\tan \theta = 3,69 \Rightarrow \mathbf{\theta = \tan^{-1}(3,69)}$ et $\mathbf{\theta \simeq 74,8^\circ}$

Sujet n°4 - CORRECTIONS

Partie A

$$1. f'(x) = \frac{-100 \times (-e^{-x})}{(0,5 + 100e^{-x})^2} = \frac{100e^{-x}}{(0,5 + 100e^{-x})^2}$$

$$2. a. 100e^{-x} - 0,5 \geq 0 \Leftrightarrow 100e^{-x} \geq 0,5 \Leftrightarrow e^{-x} \geq \frac{0,5}{100} \Leftrightarrow \ln(e^{-x}) \geq \ln(0,005) \Leftrightarrow -x \geq \ln(0,005) \\ \Leftrightarrow x \leq -\ln(0,005).$$

b. $0,5 + 100e^{-x}$ est toujours positif, car somme de deux nombres strictement positifs

On a :

x	0	$-\ln(0,005)$	10
$100e^{-x}$	+		+
$100e^{-x} - 0,5$	+	0	-
$0,5 + 100e^{-x}$	+		+
$f''(x)$	+	0	-

3. On a $f''(-\ln(0,005)) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ admet **un point d'inflexion d'abscisse $-\ln(0,005)$**

4. On a $f''(x) \geq 0$ pour $0 \leq x \leq -\ln(0,005)$ donc la fonction **f est concave sur $[-\ln(0,005); 10]$**

Partie B

$$1. a. f(10) = \frac{1}{0,5 + 100e^{-10}} \simeq 1,98$$

b. $1900 + 10 \times 25 = 2\,150$ donc, en 2150, avec ce modèle, l'évolution de température serait de $1,98^\circ\text{C}$ donc inférieure à 2°C , et l'accord de Paris serait respecté.

2. a. $x \times 25 = -\ln(0,005) \times 25 \simeq 132$ **ce qui correspondrait à l'année 2 032**

$$b. f(-\ln(0,005)) = \frac{1}{0,5 + 100e^{\ln 0,005}} = \frac{1}{0,5 + 100 \times 0,005} = \frac{1}{1} = 1$$

Il y aurait en 2 032 un degré Celsius supplémentaire par rapport à 1900.

3. a. La température terrestre continuera d'augmenter, car la fonction f est croissante sur $[0; 10]$

b.

x	0	$-\ln(0,005)$	10
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	↗		↘

Donc f' décroît bien à partir de $-\ln(0,005)$, donc la **vitesse de réchauffement diminue à partir de 2033**

$$4. \text{ On cherche à résoudre } f(x) \geq 1,5 \Leftrightarrow \frac{1}{0,5 + 100e^{-x}} \geq 1,5 \Leftrightarrow 1 \geq 1,5(0,5 + 100e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow 0,75 + 150e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow 150e^{-x} \leq 0,25 \Leftrightarrow e^{-x} \leq \frac{0,25}{150} \Leftrightarrow -x \leq \ln\left(\frac{0,25}{150}\right) \Leftrightarrow x \geq -\ln\left(\frac{0,25}{150}\right)$$

$$-\ln\left(\frac{0,25}{150}\right) \times 25 \simeq 160$$

C'est donc à partir de 2 060 que la température terrestre atteindrait ce seuil.

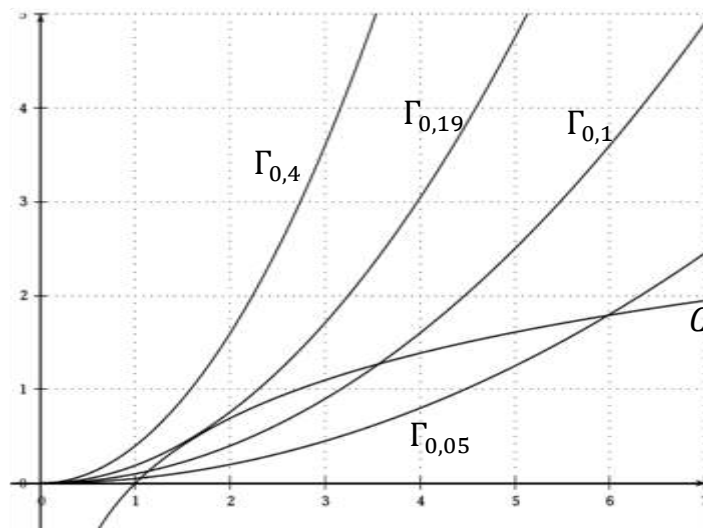
Sujet n°5 - CORRECTIONS

Partie A

1. Plus le coefficient de x^2 est proche de zéro, plus la courbe est « aplatie »

2. Il **semble** que :

- Pour $a > 0,19$ les courbes C et Γ_a n'ont aucun point d'intersection
- Pour une valeur approximative de $a \simeq 0,19$, les courbes C et Γ_a ont un seul point d'intersection
- Pour $a < 0,19$ les courbes C et Γ_a ont deux points d'intersection



Partie B

1. x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de C et Γ_a
 $\Leftrightarrow \ln x = ax^2 \Leftrightarrow \ln x - ax^2 = 0 \Leftrightarrow h_a(x) = 0$.

2. a. $h'_a(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1-2ax^2}{x}$ Or $-2ax^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2a}}$ ou $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$

le polynôme est du signe de $-2a$ à l'extérieur des racines, donc, comme $a > 0$, est négatif sur $]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2a}}]$ et sur $[\frac{1}{\sqrt{2a}}; +\infty[$ et donc positif sur $[-\frac{1}{\sqrt{2a}}; \frac{1}{\sqrt{2a}}]$.

3. a. On a $h_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right) = \frac{-1-\ln 0,2}{2} \simeq 0,3$ Donc la fonction $h_{0,1}$ change de signe sur l'intervalle $]0; \frac{1}{\sqrt{0,2}}]$.

Par ailleurs, elle est continue et strictement croissante, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet **une unique solution sur $]0; \frac{1}{\sqrt{0,2}}]$** .

b. D'après la question (1), comme l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet deux solutions, les courbes C et $\Gamma_{0,1}$ ont **deux points d'intersection**.

4. a. La valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$ est atteinte pour $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{2e}}} = \sqrt{e}$

et elle est de $h_{\frac{1}{2e}}(\sqrt{e}) = \frac{-1-\ln(\frac{2}{2e})}{2} = \frac{-1-\ln(\frac{1}{e})}{2} = \frac{-1+\ln e}{2} = 0$

b. D'après ce qui précède, la seule solution de l'équation $h_{\frac{1}{2e}}(x) = 0$ est $\sqrt{e}$. Les courbes C et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ n'ont donc **qu'un seul point d'intersection d'abscisse $\sqrt{e}$** .

5. Les courbes C et Γ_a n'auront aucun point d'intersection si le maximum de la fonction est strictement négatif : $h\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{-1-\ln(2a)}{2} < 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(2a) > 0 \Leftrightarrow \ln(2a) > -1 \Leftrightarrow 2a > e^{-1} \Leftrightarrow a > \frac{1}{2e}$

Donc pour $a > \frac{1}{2e}$ les courbes n'ont aucun point d'intersection.

Sujet n°6 - CORRECTIONS

1. a. $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

On a $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1 = g'(x)$ CQFD

b. $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$. et on a $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$

avec $g(0) = 2e^0 - e^0 - 0 = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$2e^x + 1$	$+$	$ $	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Le minimum de g est 0, en particulier, la fonction est toujours positive.

c. $u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$ Comme on a montré dans la question précédente, que la fonction g était toujours positive, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier n .

La suite (u_n) est croissante

2. a. Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = a < 0$. **La propriété est vraie au rang 0**

Hyp de réc. On suppose qu'il existe un entier p tel que $u_p \leq 0$

Hérédité : $u_{p+1} = e^{u_p}(e^{u_p} - 1)$ Donc u_{p+1} est du signe de $e^{u_p} - 1$ car e^{u_p} est toujours positif

Or, par hypothèse de récurrence, on a : $u_p \leq 0 \Leftrightarrow e^{u_p} \leq 1 \Leftrightarrow e^{u_p} - 1 \leq 0$

Donc, $u_{p+1} \leq 0$ **La propriété est vraie pour $p + 1$, donc elle est héréditaire**

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq 0$

b. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 0 : d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est donc convergente

c. Si $u_0 = 0$, comme une suite croissante est minorée par son 1^{er} terme, on a pour tout n : $0 \leq u_n \leq 0$
Donc la suite (u_n) est stationnaire nulle, et sa **limite est zéro...**

3. a. Rappelons que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

Or, comme g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, si on a $u_n \geq a > 0$, alors $g(u_n) \geq g(a)$

On a bien $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$ pour tout entier naturel n

b. Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et $a + 0 \times g(a) = a$ **La propriété est vraie au rang 0**

Hyp de réc. On suppose qu'il existe un entier p tel que $u_p \geq a + p \times g(a)$.

Hérédité : D'après la question précédente, on sait que $u_{p+1} - u_p \geq g(a) \Leftrightarrow u_{p+1} \geq u_p + g(a)$

Or, par hypothèse de récurrence, on a $u_p \geq a + p \times g(a)$

Donc, $u_{p+1} \geq a + p \times g(a) + g(a) \Leftrightarrow u_{p+1} \geq a + (p + 1) \times g(a)$

La propriété est vraie pour $p + 1$, donc elle est héréditaire

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq a + n \times g(a)$

c. On a d'après la question 1.b $g(x) \geq 0$ pour tout réel x donc $g(a) \geq 0$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a + g(a) \times n = +\infty$

Comme $u_n \geq a + n \times g(a)$, on en déduit, d'après le théorème de comparaison, que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Sujet n°7 - CORRECTIONS

Partie A

1. a. $f(0) = 4 \times 0 - 6 \times 0 + 3 \times 0 = 0$

et $f(1) = 4 - 6 + 3 = 1$

$f'(x) = 12x^2 - 12x + 3$

avec $\Delta = 0$ et $x_0 = \frac{1}{2}$

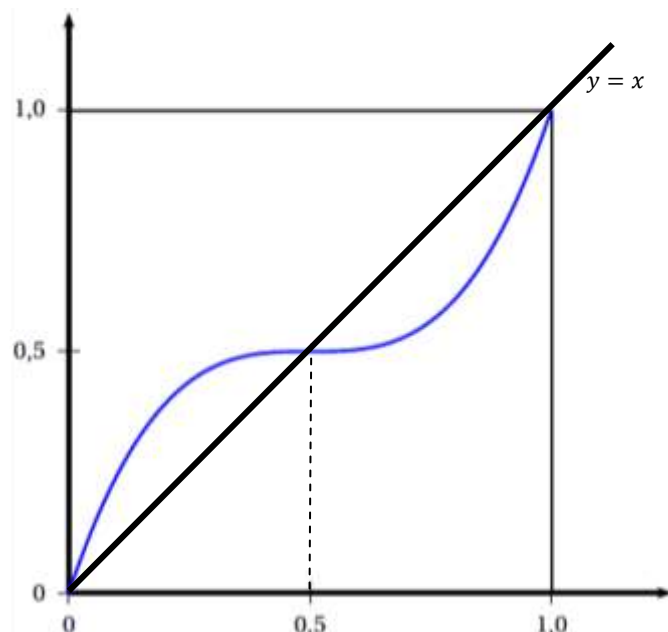
Donc f' est positive sur $[0; 1]$ et f y est croissante.

La fonction f_1 est bien une fonction de retouche.

b. On trace la droite $y = x$ (1^{ère} bissectrice) :

graphiquement : $f_1(x) \leq x \Rightarrow S = [0, 5; 1]$

Pour les couleurs codées de 0 à 0,5, la fonction de retouche va assombrir l'image, alors que pour des couleurs codées de 0,5 à 1, elle va au contraire les éclaircir



2. a. $g'(x) = \frac{e-1}{1+(e-1)x} - 1 = \frac{e-1-1-(e-1)x}{1+(e-1)x} = \frac{e-2-(e-1)x}{1+(e-1)x}$ CQFD

b. On a : $e - 2 - (e - 1)x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e-2}{e-1} \simeq 0,42$ et le coefficient directeur $-(e - 1)$ est négatif

et $1 + (e - 1)x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-e} \simeq -0,6$ et le coefficient directeur $(e - 1)$ est négatif

Donc

x	0	$\frac{e-2}{e-1}$	1
$e - 2 - (e - 1)x$	+	0	-
$1 + (e - 1)x$	+		+
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$\nearrow \ln(e - 1) - \frac{e-2}{e-1}$	$\searrow 0$

On a $g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) = \ln\left[1 + (e - 1)\frac{e-2}{e-1}\right] - \frac{e-2}{e-1} = \ln[1 + e - 2] - \frac{e-2}{e-1} = \ln(e - 1) - \frac{e-2}{e-1} \simeq 0,123$

La fonction g admet bien un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. La fonction g est continue sur $[0; 1]$.

Elle est strictement croissante sur $\left[0; \frac{e-2}{e-1}\right]$ avec $0,05 \in \left[g(0); g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)\right]$, donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = 0,05$ y admet une solution α .

De même g est strictement décroissante sur $\left[\frac{e-2}{e-1}; 1\right]$ avec $0,05 \in \left[g(1); g\left(\frac{e-2}{e-1}\right)\right]$, donc l'équation $g(x) = 0,05$ y admet une solution β .

Partie B

Traduction : Une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si : $f(x) - x \geq 0,05$

1. Explications :

- x prend successivement, à chaque tour de boucle, les valeurs 0 ; 0,01 ; 0,02... jusqu'à 1, c'est-à-dire les différentes valeurs de codage des nuances.

- y prend successivement, à chaque tour de boucle, les valeurs les valeurs $f(x)$, c'est-à-dire

$f(0) ; f(0,01) ; f(0,02) \dots f(1)$, qui représentent les différents codages de nuances après modification.

Pour chaque pas, l'algorithme :

- calcule $E = |f(x) - x|$, c'est-à-dire la (valeur absolue de la) différence entre la nuance d'origine et la nuance retouchée
- compare cet écart à 0,05 : s'il est supérieur (c'est-à-dire si la modification de nuance est perceptible visuellement), il ajoute 1 au compteur.

Réponse : L'algorithme permet de **compter le nombre de nuances dont la modification par la fonction de retouche va être perceptible visuellement.**

2. Explications : On sait, d'après la question 1c que $g(x) \geq 0,05$ pour $x \in [\alpha; \beta]$

Donc pour tous les valeurs de x de pas 0,01 comprises entre α et β , on aura : $|g(x)| \geq 0,05$ c'est-à-dire $|f(x) - x| \geq 0,05$ et donc, le compteur comptera 1 de plus pour chaque pas.

Or, on a : $0,08 < \alpha < 0,09$ et $0,85 < \beta < 0,86$.

Donc :

- Pour $x \leq 0,08$, $|f(x) - x| < 0,05$

- Pour $x \geq 0,86$, $|f(x) - x| < 0,05$

- Pour $0,09 \leq x \leq 0,85$, $|f(x) - x| > 0,05$ et le compteur augmente de 1.

Il y a $0,85 - 0,09 = 0,76 \Rightarrow$ Il y a $76 + 1 = 77$ pas (les deux bornes comptent, d'où le +1 : c'est la même différence entre le nombre d'intervalles et le nombre de points)

Réponse :

On sait, d'après la question 1c que $g(x) \geq 0,05$ pour $x \in [\alpha; \beta]$

Comme $0,08 < \alpha < 0,09$ et $0,85 < \beta < 0,86$ on a donc $|f(x) - x| > 0,05$ pour $0,09 \leq x \leq 0,85$

L'algorithme affichera la valeur 77

Sujet n°8 - CORRECTIONS

1. Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ on a bien $1 \leq u_0 \leq e^2$

la propriété est **vraie pour $n = 0$**

Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $1 \leq u_p \leq e^2$

Hérédité : On a $1 \leq u_p \leq e^2$

Comme la fonction racine est croissante, on en déduit :

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{u_p} \leq \sqrt{e^2} \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{u_p} \leq e \Leftrightarrow e \leq e\sqrt{u_p} \leq e^2$$

$$\text{et comme } 1 \leq e, \text{ on obtient, par élargissement } 1 \leq e\sqrt{u_p} \leq e^2 \Leftrightarrow 1 \leq u_{p+1} \leq e^2$$

Donc la propriété est aussi vraie pour $p + 1$: elle est héréditaire

Conclusion : pour tout entier naturel n on a : $1 \leq u_n \leq e^2$

2. a. 1^{ère} méthode : On cherche à démontrer par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = e \simeq 2,7$ on a bien $u_0 \leq u_1$ la propriété est **vraie pour $n = 0$**

Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $u_p \leq u_{p+1}$

Hérédité : On a $u_p \leq u_{p+1}$ on a montré à la question précédente que les termes de la suite étaient positifs

$$\text{Donc } \sqrt{u_p} \leq \sqrt{u_{p+1}} \Leftrightarrow e\sqrt{u_p} \leq e\sqrt{u_{p+1}} \Leftrightarrow u_{p+1} \leq u_{p+2}$$

Donc la propriété est aussi vraie pour $p + 1$: elle est héréditaire

Conclusion : pour tout entier naturel n on a : $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite (u_n) est croissante

2^{ème} méthode : On a montré à la question précédente que la suite (u_n) était à termes positifs.

$$\text{Or } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{e}{\sqrt{u_n}} \text{ et comme } u_n \leq e^2 \Rightarrow \sqrt{u_n} \leq e \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{u_n}} \geq \frac{1}{e} \text{ on a } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq e \times \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

On a donc $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite (u_n) est croissante

(C'est plus rapide qu'une récurrence, mais je rappelle que ça ne marche **QUE pour les suites à termes POSITIFS**, il faut donc l'avoir prouvé auparavant. N'oubliez pas non plus que déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ reste une autre méthode possible)

b. La suite (u_n) est croissante et majorée par e^2 : d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est donc **convergente vers un réel ℓ**

3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln(u_n) - 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln(e \times \sqrt{u_n}) - 2 = \ln e + \ln(\sqrt{u_n}) - 2 = 1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) - 2 = \frac{1}{2} \ln(u_n) - 1 \\ &= \frac{1}{2} (\ln(u_n) - 2) = \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

Vous pouvez aussi utiliser $\ln(u_n) = v_n + 2$

Donc (v_n) est bien une suite **géométrique de raison $\frac{1}{2}$** et de 1^{er} terme $v_0 = \ln(1) - 2 = -2$

b. On a alors $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -2 \times \frac{1^n}{2^n} = -\frac{1}{2^{n-1}}$

c. $v_n = \ln(u_n) - 2 \Leftrightarrow \ln(u_n) = v_n + 2 \Leftrightarrow u_n = e^{v_n+2} = e^{-\frac{1}{2^{n-1}}+2}$

d. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 2\right) = 2$ donc, par composée de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$

4. **Affirmation 1** : Affirmation **fausse**, en effet, on a $u_1 \simeq 122$ donc $u_1 < u_0$ et $u_2 \simeq 30$ et $u_2 < u_1$
la suite a plutôt l'air décroissante

Affirmation 2 : Affirmation **vraie** : dans le raisonnement par récurrence de la question 1, la valeur de u_0 n'intervient que pour l'initialisation.

Or, c'est encore vrai pour $u_0 = 2$, on a toujours $1 \leq u_0 \leq e^2$.

La propriété reste vraie au rang 0 et comme elle est héréditaire, **elle reste vraie pour tout n**

Affirmation 3 : Affirmation **fausse**

$$u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow e\sqrt{u_n} = u_n \Leftrightarrow u_n^2 - e^2 u_n = 0 \Leftrightarrow u_n(u_n - e^2) = 0 \Leftrightarrow u_n = 0 \text{ ou } u_n = e^2$$

Donc la suite est stationnaire si $u_0 = 0$ **mais aussi si $u_0 = e^2$**