Corrigés Savoirs Fc. 6

Corrigé Exercice 14

1) La fonction f est **convexe sur** $]-\infty; \mathbf{-5}]$ **et sur** $[\mathbf{1}; +\infty[$
La fonction f est **concave sur** $[\mathbf{-5}; \mathbf{1}]$

2) $\mathcal{C}_f$ a **deux** points d''inflexion : **pour** $\boldsymbol{x = -5}$ **et pour** $\boldsymbol{x = 1}$
(rappel : pour un point d'inflexion, la dérivée seconde doit changer de signe, pas simplement s'annuler)

3) Au point d'abscisse $x = 2$, la dérivée 2$^{\text{nde}}$ $f''(x)$ est positive, la fonction f est donc convexe et $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente $\mathcal{T}_2$
Au point d'abscisse $x = -3$, la dérivée 2$^{\text{nde}}$ $f''(x)$ est négative, la fonction f est donc concave et $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente $\mathcal{T}_{-3}$

Corrigé Exercice 15

1) a) On calcule : $\Delta = 25 - 24 = 1$.
Les racines de $x^2 + 5x + 6$ sont donc –2 et –3.
On dresse ainsi le tableau de signes de H'' :

x	$-\infty$		-3		-2		4		$+\infty$
$x^2 + 5x + 6$		+	0	−	0	+	$\vert$	+	
$2x - 8$		−	$\vert$	−	$\vert$	−	0	+	
e^{-2x}		+	$\vert$	+	$\vert$	+	$\vert$	+	
$H''(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

b) La courbe de H a donc 3 points d'inflexions :
en $x = -3$, en $x = -2$ et en $x = 4$.

c) La courbe de H est **au dessus** de ses tangentes sur [–3 ; –2] et sur [4 ; +∞[, et **en dessous** ailleurs.

Un peu plus…

3) a) $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$

b) $f''(x) = 6x + 3$

c)

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	

f est donc convexe sur [–0,5 ; +∞[
et concave sur]–∞ ; –0,5].

d) La courbe de f est au dessus de ses tangentes sur l'intervalle [–0,5 ; +∞[

3) a) $g'(x) = \frac{(2x-5)\times x^2 - (x^2-5x+1)\times 2x}{x^4} = \frac{2x^3-5x^2-2x^3+10x^2-2x}{x^4} = \frac{5x^2-2x}{x^4} = \frac{x(5x-2)}{x^4} = \frac{5x-2}{x^3}$

b) $g''(x) = \frac{(5x^3-(5x-2)\times 3x^2)}{x^6} = \frac{-10x^3+6x^2}{x^6} = \frac{x^2(6-10x)}{x^6} = \frac{6-10x}{x^4}$

c) On obtient :

x	$-\infty$		0		$0{,}6$		$+\infty$
$6 - 10x$		+	$\vert$	+	0	−	
x^4		+	0	+	$\vert$	+	
$g''(x)$		+	$\Vert$	+	0	−	

g est donc convexe sur]–∞ ; 0[et sur]0 ; 0,6], puis concave sur [0,6 ; +∞[.

d) La courbe de g est en dessous de ses tangentes sur l'intervalle [0,6 ; +∞[

Corrigé Exercice 16

1. a. $f'(x) = e^{x^2-1} + x \times 2xe^{x^2-1} = (2x^2+1)e^{x^2-1}$ CQFD

b. $\Delta < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x^2+1$	$+$
e^{x^2-1}	$+$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	↗

2. $f''(x) = 2x(2x^2+3)e^{x^2-1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$
$2x^2+3$	$+$	|	$+$
e^{x^2-1}	$+$	|	$+$
$g''(x)$	$-$	0	$+$

La fonction *f* est convexe sur [0 ; +∞[

Corrigé Exercice 17

Indication de démarche : pour connaître la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point, il faut savoir si elle est convexe ou concave en ce point, et donc connaître le signe de la dérivée seconde en ce point. On peut alors soit calculer uniquement f'' et sa valeur en ce point et conclure, soit faire une étude plus générale…

$f(x) = 3x - 3x\ln(x) \quad \Rightarrow f'(x) = 3 - 3\ln(x) - 3x \times \frac{1}{x} = \mathbf{-3\ln(x)}$

$\Rightarrow \boldsymbol{f''(x) = -\frac{3}{x}}$

En $x = 1$, on a $f''(1) = -3 < 0$

$\Rightarrow$ La dérivée seconde f'' est négative en $x = 1$, donc la fonction y est concave et **sa courbe C_f est en dessous de sa tangente *T***

(de façon plus générale, $f''(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$, donc la fonction f est concave sur $]0; +\infty[$ et donc en dessous de ses tangentes, en particulier en $x = 1$)

Corrigé Exercice 18

A. 1. la concentration à l'instant initial est d'environ **2 g/L**

2. la concentration est supérieure ou égale à 0,4 g/L **entre 0 et 6h**

B. 1. $f'(x) = e^{-0,5x} - 0,5(x+2)e^{-0,5x} = (1 - 0,5x - 1)e^{-0,5x} = -0,5xe^{-0,5x}$ *CQFD*

x	0		15
$-0,5x$	0	$-$	
$e^{-0,5x}$		$+$	
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	$\simeq 0,009$

2. f est continue et strictement décroissante sur [0 ; 15], avec $f(0) > 0,1$ *et* $f(15) < 0,1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0;15]

3. $f(9,48) \simeq 0,1003$ *et* $f(9,49) \simeq 0,099 \Rightarrow$ *Donc* $\mathbf{9,4 < \alpha < 9,5}$

4. [1ère ligne : $f'(x) = e^{-0,5x} - 0,5e^{-0,5x}(x+2)$

2ème ligne : $f''(x) = -e^{-0,5x} + 0,25e^{-0,5x}(x+2)$

3ème ligne : $f''(x) = (0,25x - 0,5)e^{-0,5x}$]

x	0	2	15
$0,25x - 0,5$	$-$	0	$+$
$e^{-0,5x}$	$+$	|	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

La fonction f est **concave sur $[0; 2]$ et convexe sur $[2; 15]$** : sa courbe admet un **point d'inflexion en $x = 2$**

C. 1. D'après la question B3, e**ntre 0 et 9,5 heures (9h30)**

2. D'après la question B4, **à partir de 2 heures** (point d'inflexion)