Savoir Vps. 7 : Orthogonalité & géométrie

Entraînement n°1

1) Dans un repère (O, I, J) on a $M(-2; 2)$; $N(1; 7)$; $P(-3; 4)$; $R\left(-\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $S(-1; -5)$; $T(7; 2)$ et $U(0\,; 10)$

a. Les droites (TU) et (NP) sont-elles perpendiculaires ? Justifier.

b. Dans le triangle RST, la droite (MS) est-elle la hauteur issue de S? Justifier.

2) $ABCD$ est un carré de centre O. On se place dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$

On a les points M et P définis par : $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OP} = 5\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{AB}$

Montrer que le triangle OMP est rectangle en O

3) Dans un repère (O, I, J), on donne les points $S(3; -3)$; $T(-3; 1)$ et un point mobile $M(-2\,; t)$ qui varie selon le paramètre $t \in \mathbb{R}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de t les droites (SM) et (TM) sont-elles perpendiculaires ?

Entraînement n°2

1) Dans un repère (O, I, J) on a $A(-9; -3)$; $B(6; 7)$; $C(1; -17)$; $D(3; -11)$; $E(9; -6)$ et $F(-3; -4)$

a. Le triangle ABC est-il rectangle en A ? Justifier.

b. Le quadrilatère $BEDF$ a-t-il ses diagonales perpendiculaires ? Justifier.

2) TRI est un triangle isocèle et rectangle en T. On se place dans le repère $\left(T, \overrightarrow{TR}; \overrightarrow{TI}\right)$

On a les points E et F définis par : $\overrightarrow{RE} = 5\overrightarrow{TR} + 2\overrightarrow{TI}$ et $\overrightarrow{RF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{TI}$

Montrer que les droites (RE) et (IF) sont perpendiculaires

3) Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(4; -3)$; $B(-2; 0)$ et un point mobile $M(t; 2t)$ qui varie selon le paramètre $t \in \mathbb{R}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de t le triangle ABP est-il rectangle en A ?

Entraînement n°3

1) Dans un repère (O, I, J) on a les points $D(0; 4)$; $E(6; -4)$; $F(2; -7)$; $G(-4; 1)$; $H(-1; -3)$ et $K(5; 9)$

a. Les droites (GE) et (HK) sont-elles perpendiculaires ? Justifier.

b. Montrer que le quadrilatère $DEFG$ est un parallélogramme. Puis montrer qu'il s'agit d'un rectangle.

2) Soit $CART$ un carré. On a les points B et W définis par : $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{RW} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AR}$

Montrer que les droites (BW) et (CR) sont perpendiculaires

3) Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(-1; 3)$; $B(1; -1)$ et un point mobile $M(2t; 1 + t)$ qui varie selon le paramètre $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que les droites (JM) et (AB) sont perpendiculaires, quelle que soit la valeur de t.

Savoir Vps. 7 : Corrections

Corrigé Entraînement n°1

1) a. $\overrightarrow{TU}\begin{pmatrix}0-7\\10-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$. Alors $\overrightarrow{TU}.\overrightarrow{NP}=--7\times(-4)+8\times(-3)=28-24=4\neq 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{TU}$ et $\overrightarrow{NP}$ ne sont pas orthogonaux donc les droites (TU) **et (NP) ne sont pas perpendiculaires.**

b. Savoir si la droite (MS) est la hauteur issue de S dans le triangle RST revient à savoir si les droites (MS) et (RT) sont perpendiculaires
On a $\overrightarrow{MS}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}7+\frac{11}{2}\\2+\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{35}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{RT}=1\times\frac{35}{2}-7\times\frac{5}{2}=\frac{35}{2}-\frac{35}{2}=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{MS}$ et $\overrightarrow{RT}$ sont orthogonaux, donc la droite (MS) **est bien la hauteur issue de S** dans RST

2) On a $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OP}=5\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{AB}$ comme $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$, on a $\overrightarrow{OP}=-5\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AO}+3\overrightarrow{OB}$
$\overrightarrow{OP}=-8\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$ Donc $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\times(-8)+2\times 3=-6+6=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux, donc le **triangle OMP est bien rectangle en O**

3) On a $\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix}-5\\t+3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{TM}\begin{pmatrix}1\\t-1\end{pmatrix}$
Donc $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{TM}=-5+(t+3)(t-1)=-5+t^2-t+3t-3=\boldsymbol{t^2+2t-8}$
Les droites (SM) et (TM) sont perpendiculaires quand $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{TM}=0 \iff t^2+2t-8=0$
On calcule $\Delta=4+32=36$ et $t_1=\frac{-2+6}{2}=2$; $\frac{t_2(-2-6)}{2}=-4$
Les droites (SM) et (TM) sont perpendiculaires pour $t\in\{-4;2\}$

Corrigé Entraînement n°2

1) a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6+9\\7+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\-14\end{pmatrix}$. Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=15\times 10+10\times(-14)=150-140=10\neq 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux donc le **triangle ABC n'est pas rectangle en A**

b. On a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\\-18\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-12\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{EF}=+36-36=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux, donc les diagonales (BD) **et (EF) sont bien perpendiculaires**

2) On a $\overrightarrow{RE}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{IT}+\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{RF}=-\overrightarrow{TI}+\overrightarrow{TR}-\frac{3}{2}\overrightarrow{TI}=\overrightarrow{TR}-\frac{5}{2}\overrightarrow{TI}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$
Donc $\overrightarrow{RE}.\overrightarrow{IF}=5-\frac{5}{2}\times 2=5-5=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{RE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont orthogonaux, donc les droites (RE) **et (IF) sont bien perpendiculaires**

3) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}t-4\\2t+3\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} = -6(t-4)+3(2t+3) = -6t+24+6t+9 = \mathbf{32}$

Il n'existe aucune valeur de t pour laquelle on pourrait avoir $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} = 0$, donc le **triangle $\boldsymbol{ABP}$ ne sera jamais rectangle en $\boldsymbol{A}$**

Corrigé Entraînement n°3

1) a. $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}$. Alors $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{HK} = 60-60 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{HKJ}$ sont orthogonaux, donc les **droites $(\boldsymbol{GE})$ et $(\boldsymbol{HK})$ sont bien perpendiculaires**

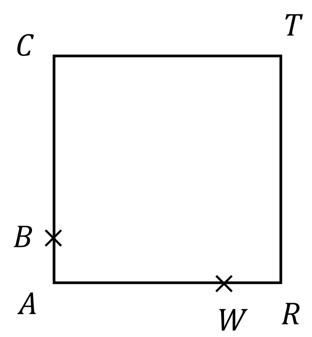
b. On a $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GF}$ et le quadrilatère $DEFG$ est un parallélogramme

On a de plus $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{EF} = -24+24 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux, l'angle $\widehat{DEF}$ est un angle droit.

Un parallélogramme qui a un de ses angles droit est un rectangle, donc **$\boldsymbol{DEFG}$ est bien un rectangle**

2) On peut, par exemple, se placer dans la base $\left(\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AR}\right)$. Si vous choisissez une autre base, les résultats intermédiaires seront différents, mais la conclusion doit être la même.



$\overrightarrow{BW} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RW} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ Donc $\overrightarrow{BW}.\overrightarrow{CR} = -\frac{4}{5}+\frac{4}{5} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{BW}$ et $\overrightarrow{CR}$ sont orthogonaux, donc les droites **$(\boldsymbol{BW})$ et $(\boldsymbol{CR})$ sont bien perpendiculaires**

3) Pour rappel dans (O,I,J) on a $J(0;1)$ alors $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}2t\\t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{AB} = 4t-4t = 0$ le résultat ne dépend pas de t, les vecteurs $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont toujours orthogonaux. Donc les droites **$(\boldsymbol{JM})$ et $(\boldsymbol{AB})$ sont toujours perpendiculaires, quelle que soit la valeur de $\boldsymbol{t}$.**