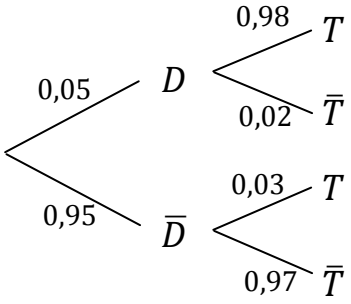
Corrections

Corrigé Exercice 1



PARTIE I

1.

2. a. $p(D \cap T) = p(D) \times p_D(T) = 0{,}05 \times 0{,}98 = 0{,}049$

La probabilité qu'une pièce soit défectueuse et aie un test positif est de 4,9 %

b. $p(T) = p(D \cap T) + p(\overline{D} \cap T) = 0{,}049 + 0{,}95 \times 0{,}03 = 0{,}0775$

3. $p_T(D) = \frac{p(D \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}049}{0{,}0775} \simeq 0{,}632$

Sa valeur prédictive est d'environ 63 %, donc bien inférieure à la valeur exigée. **Le test n'est donc pas efficace.**

PARTIE II

1. Il s'agit d'une **répétition** de 20 épreuves de Bernoulli **indépendantes**, de probabilité de **succès** $0{,}05$: la variable X suit bien une loi binomiale de **paramètres $\boldsymbol{n = 20}$ et $\boldsymbol{p = 0{,}05}$**

2. $E(X) = np = 20 \times 0{,}05 = \mathbf{1}$

Sur un grand nombre d'échantillon, il y aura en moyenne une pièce défectueuse par échantillon.

3. $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0{,}05^5 \times (1 - 0{,}05)^{20-5} = \mathbf{15504 \times 0{,}05^5 \times 0{,}95^{15}} \simeq 0{,}002$

Il y a environ 0,2% de chances que l'échantillon contienne exactement 5 pièces défectueuses

4. On cherche le nombre n de pièces tel que $p(X > 5) \geq 0{,}01$, c'est-à-dire tel que $1 - p(X \leq 5) \geq 0{,}01$
En utilisant le tableur de la calculatrice, avec n comme inconnue, on trouve :
pour $n = 37$, $p(X > 5) \simeq 0{,}0095$ et pour $n = 38$, $p(X > 5) \simeq 0{,}0109$
Il faudra donc au minimum 38 pièces dans l'échantillon pour avoir plus de 10% de chances d'y trouver plus de 5 pièces défectueuses

Acceptation de l'inégalité large : $p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4)$
et alors pour $n = 26$, $p(X > 5) \simeq 0{,}0085$ et pour $n = 27$, $p(X > 5) \simeq 0{,}01002$
donc à partir de 27 pièces

Corrigé Exercice 2

Partie I

En 10 minutes, les gâteaux sont passés de -19°C à 1,3°C, soit un différentiel de $1{,}3-(-19)=20{,}3°C$
Donc si l'augmentation est constante, elle est de $\frac{20{,}3}{10}=2{,}03°C$ par minute
Donc 25 minutes après la sortie du congélateur, les gâteaux seraient à $-19+2{,}03\times 25=\mathbf{31{,}75°C}$
Il n'est pas possible qu'ils deviennent plus chaud que la température extérieure : **le modèle n'est donc pas pertinent.**

Partie II

1. $T_{n+1}-T_n=-0{,}06\times(T_n-25)=T_n-0{,}06\times(T_n-25)=T_n-0{,}06T_n+1{,}5=\mathbf{0{,}94T_n+1{,}5}$ **CQFD**

2. $T_1=0{,}94T_0+1{,}5=0{,}94\times(-19)+1{,}5=-16{,}36\simeq-16{,}4$
$T_2=0{,}94\times(-16{,}36)+1{,}5\simeq-13{,}9$

3. À la calculatrice, on trouve $T_{17}\simeq 9{,}6$ et $T_{18}\simeq 10{,}6$
Donc Cécile doit déguster son gâteau entre 17 et 18 minutes après les avoir sorti du congélateur.

4. a. $U_{n+1}=T_{n+1}-25=0{,}94T_n+1{,}5-25=0{,}94(U_n+25)-23{,}5=0{,}94U_n+23{,}5-23{,}5=0{,}94U_n$
et $u_0=T_0-25=-19-25=-44$
$(\boldsymbol{U_n})$ **est bien une suite géométrique de raison 0,94 et le premier terme** $\boldsymbol{U_0=-44}$

b. On a alors $U_n=U_0\times q^n=-44\times 0{,}94^n$ et $T_n=U_n+25=\mathbf{-44\times 0{,}94^n+25}$ **CQFD**

5. $\lim\limits_{n\to\infty}0{,}94^n=0$ car $0{,}94\in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=-44\times 0+25=\mathbf{25}$
À terme, les gâteau finiront par se stabiliser à la température ambiante, soit $\mathbf{25°C}$

Partie III

1. Initialisation :
Pour $n=0$, on a $\theta_n=\theta_0=-19$ et$-0{,}05n^2+2{,}5n-19=-0{,}05\times 0+2{,}5\times 0-19=-19$
L'égalité est vraie pour $n=0$

Hypothèse :
On suppose qu'il existe un entier naturel p quelconque pour lequel on a $\theta_p=-0{,}05p^2+2{,}5p-19$

Hérédité :
pour $n=p+1$, on a d'une part :
$\theta_n=\theta_{p+1}=\theta_p-0{,}1p+2{,}45$
$=-0{,}05p^2+2{,}5p-19-0{,}1p+2{,}45$
$=-0{,}05p^2+2{,}4p-16{,}55$

et d'autre part :
$-0{,}05(p+1)^2+2{,}5(p+1)-19$
$=-0{,}05p^2-0{,}1p-0{,}05+2{,}5p+2{,}5-19$
$=-0{,}05p^2+2{,}4p-16{,}55$

L'égalité est vraie pour $n=p+1$

Conclusion :
Pour tout entier naturel n, on a bien $\theta_n=-0{,}05n^2+2{,}5n-19$

2. $\theta_{30}=-0{,}05\times 30^2+2{,}5\times 30-19=11$ **Les gâteaux auraient une température de 11°C**

Corrigé Exercice 3

1. On trouve : $B(1;0;0), D(0;1;0), E(0;0;1), G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$.

2. a. Les longueurs EG, GD et DE sont les longueurs des diagonales de trois faces carrées identiques, donc elles sont égales. EGD est donc équilatéral.

b. On a $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $EG=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$ donc l'aire de EGD est : $\frac{\sqrt{3}}{4}EG^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2=\frac{\sqrt{3}}{2}$. CQFD

3. On a $\overrightarrow{BH}(-1,1,1)$ donc $\overrightarrow{BM}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ or avec $M(x;y;z)$ on a $\overrightarrow{BM}(x-1;y;z)$.

On en déduit que $x-1=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$; $y=\frac{1}{3}$; $z=\frac{1}{3}$.

En conclusion, on a bien : $M\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

4. a. On a : $\vec{n}.\overrightarrow{EG}=-1+1+0=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{ED}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=0+1-1=0$

$\vec{n}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD), il est donc normal à (EGD).

b. (EGD) a donc une équation cartésienne de la forme $-x+y+z+d=0$

Or $E\in(EGD)\Rightarrow d=x_E-y_E-z_E=0-0-1=-1$.

(EGD) a donc pour équation cartésienne $-x+y+z-1=0$ CQFD

c. $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (EGD) de vecteur $\vec{n}$ donc $\vec{n}$ en est un vecteur directeur.

On a donc : $\mathcal{D}:\begin{cases}x=\frac{2}{3}-t\\y=\frac{1}{3}+t\\z=\frac{1}{3}+t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

5. a. La hauteur en question est la droite (KM) perpendiculaire à (EGD) passant par M : c'est la droite $\mathcal{D}$ de la question **4c**. Il existe donc un nombre $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}x_K=\frac{2}{3}-t\\y_K=\frac{1}{3}+t\\z_K=\frac{1}{3}+t\end{cases}$

Or $K\in(EGD)$ donc $-x_K+y_K+z_K-1=0$

On obtient donc : $-\left(\frac{2}{3}-t\right)+\frac{1}{3}+t+\frac{1}{3}+t-1=0\Rightarrow 3t-1=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}$

On a donc : $\begin{cases}x_K=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\\y_K=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\\z_K=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow K\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ CQFD

b. Le volume de la pyramide $GEDM$ est donc égale à $\mathcal{V}=\frac{b\times h}{3}$ où b est l'aire du triangle EGD et h la hauteur issue de M.

D'après les questions **2b**, **3** et **5a**, on a donc : $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$h=KM=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{3}{9}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ D'où : $\mathcal{V}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{3}=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}$

Corrigé Exercice 4

Partie I

1. On a $f'(0) = \frac{2}{5} = 0{,}4$ (lecture directe sur la courbe, attention à l'échelle), donc **le coefficient directeur de la tangente à la $\mathcal{C}_f$ en 0 est de $\frac{2}{5}$**

2. a. Lecture graphique :

x	-7		-2		1		7
$f'(x)$	-0,3	↘	-0,7	↗	0,7	↘	0,3

b. On déduit des variations de f' :

x	-7		-2		1		7
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc f est convexe sur $[-2; 1]$

Partie II

1. $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$

2. Pour $x^2 + x + \frac{5}{2}$, on a $\Delta = 1 - 4 \times \frac{5}{2} = -9$ il est donc de signe constant, positif

x	-10		$-\frac{1}{2}$		10
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$x^2+x+\frac{5}{2}$		$+$	$\|$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln\left(\frac{185}{2}\right)$	↘	$\ln\left(\frac{9}{4}\right)$	↗	$\ln\left(\frac{225}{2}\right)$

3. a. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}; 10\right]$ et on a $f\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}8$ et $f(10) \simeq 4{,}7$: donc 2 est une valeur intermédiaire. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 10\right]$

b. À la calculatrice, on trouve : $1{,}77 < \alpha < 1{,}78$ donc $\alpha \simeq 1{,}8$

4. Pour $-2x^2 - 2x + 4$, on a $\Delta = 4 + 32 = 36$ et $x_1 = \frac{2+6}{-4} = -2$; $x_1 = \frac{2-6}{-4} = 1$

x	-10		-2		1		10
$-2x^2-2x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x^2+x+\frac{5}{2}$		$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet 2 points d'inflexion : en $x = -2$ et en $x = 1$