Savoir SL. 5 : Produit et quotient

Déterminer les limites des suites suivantes, en justifiant (*ne pas chercher à résoudre les cas indéterminés*).

Entraînement 1

$$a_n = (n^2 - 3)(1 - n^3) \quad b_n = -3e^n(e^{-n} - 2) \quad c_n = \left(5 - \frac{2}{n}\right)\left(2 + \frac{4}{n}\right) \quad v_n = 2n \ln(n)$$

$$w_n = \frac{3 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - 6} \quad x_n = \frac{n^2}{0,5^n} \quad y_n = \frac{5^n - 2}{\frac{1}{5^n} + 2} \quad z_n = \frac{0,2^n - 1}{1 - n}$$

Entraînement 2

$$a_n = \frac{1 - 3n^2}{3^n} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)(n^2 + 2n + 1) \quad c_n = 2e^{-n}\left(1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n\right) \quad v_n = \frac{3}{1 - 2n^2}$$

$$w_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{2^n}\right) \quad x_n = \frac{\ln(n)}{3 - n} \quad y_n = \frac{2 + \frac{3}{n}}{-0,5^n} \quad z_n = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n - 3\right)\left(\left(\frac{5}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\right)$$

Entraînement 3

$$S_n = (5n + 1)(-2)^n \quad T_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n^2} - 2\right) \quad w_n = (n + 1)(2 - n) \quad x_n = \frac{2 - 3^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2}$$

$$y_n = \frac{2 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{2 - e^n} \quad z_n = \frac{1 - 2^{-n}}{2^{-n}} \quad a_n = \frac{2^{-n}}{1 - 2^{-n}} \quad b_n = \frac{\ln(n)}{1 - \ln(n)}$$

Entraînement 4

$$u_n = n - 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^n \quad x_n = \frac{e^n}{4}(1 - n) \quad c_n = \frac{1}{(1 - n) \ln(n)} \quad d_n = (n + 1) \times \left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

$$y_n = \frac{6 - e^{-n}}{2n + 5} \quad z_n = \frac{n}{0,4^n - 2} \quad a_n = 3^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}\right) \quad b_n = \frac{0,2^n - 3}{3 \times 0,2^n}$$

Entraînement 5

$$a_n = \left(3 + \frac{7}{n}\right)\left(7 + \frac{3}{n}\right) \quad b_n = (3 - 7n)\left(\frac{3}{n} - 7\right) \quad w_n = \frac{3}{n^2 + n} \quad d_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (1 - 3^n)$$

$$y_n = \frac{3 - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n} - 6} \quad z_n = \frac{5 + 2^n}{5 - 2^n} \quad u_n = (3^n + 2)(3 - 2^n) \quad v_n = \frac{-4 + 3 \times 2^{-n}}{2^{-n}}$$

Entraînement 6

$$u_n = -2n^2(1 - n)$$

$$v_n = (-1)^n(3n - 1)$$

$$w_n = \frac{2}{n^2 - 1}$$

$$x_n = \frac{3^{-n} - 1}{3^{-n}}$$

$$y_n = \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{3}{n} - 2\right)$$

$$z_n = \frac{2^n + 1}{-2 + \frac{1}{n^2}}$$

$$a_n = \frac{1,5^n - 1}{2 \times 0,5^n}$$

$$b_n = (n^2 - 1)(2 - 3n^2)$$

Corrigé Savoir SL. 5

Corrigé Entraînement 1

- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 3 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - n^3 = -\infty \end{cases}$ Donc, par produit de limites, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} -3e^n = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} - 2 = -2 \end{cases}$ Donc, par produit de limites, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 - \frac{2}{n} = 5 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{4}{n} = 2 \end{cases}$ Donc par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 5 \times 2 = 10$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty \end{cases}$ donc, par produit de limites, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 6 = -6 \end{cases}$ donc, par quotient de limites, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0 \end{cases}$ car $0,5 \in]-1; 1[$ donc pour (x_n) il s'agit d'une **forme indéterminée**
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n - 2 = +\infty \quad \text{car } 5 > 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 = 2 \quad \text{car } \frac{1}{5} \in]-1; 1[\end{cases}$ Par quotient de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n - 1 = -1 \quad \text{car } 0,2 \in]-1; 1[\\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - n = -\infty \end{cases}$, par quotient de limites, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$

Corrigé Entraînement 2

- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 3n^2 = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \quad \text{car } 3 > 1 \end{cases}$ Ici, pour (a_n) il s'agit d'un **cas indéterminé**
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 2n + 1 = +\infty \end{cases}$ par somme Donc, par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2e^{-n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n = 1 \quad \text{car } \frac{2}{e} \in]-1; 1[\end{cases}$ Donc par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0 \times 1 = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 2n^2 = -\infty$, donc, par quotient de limites, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{2^n} = 3 \end{cases} \text{ donc, par } \underline{\text{produit}} \text{ de limites, on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2 \times 3 = 6$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - n = -\infty \end{cases} : \text{ pour } (x_n) \text{ il s'agit d'une } \underline{\text{forme indéterminée}}$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{3}{n} = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -0,5^n = 0 \text{ car } 0,5 \in] -1; 1[\end{cases} \text{ Le numérateur est positif, et le dénominateur négatif.}$$

Donc par quotient de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -\infty$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n - 3 = -3 \text{ car } 0,2 \in] -1; 1[\\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n + \frac{1}{3} = +\infty \text{ car } \frac{5}{2} > 1 \end{cases} \text{ par } \underline{\text{quotient}} \text{ de limites : } \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = -\infty$$

Corrigé Entraînement 3

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n + 1 = +\infty \text{ mais } (-2)^n \text{ n'a pas de limite car } -2 < -1. \text{ Donc } (S_n) \text{ n'a pas de limites}$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} - 2 = -2 \end{cases} \text{ Donc par } \underline{\text{produit}} \text{ de limites, } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 2 \times (-2) = -4$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - n = -\infty \end{cases} \text{ donc, par } \underline{\text{produit}} \text{ de limites, on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - 3^n = -\infty \text{ car } 3 > 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 = -2 \text{ car } \frac{1}{3} \in] -1; 1[\end{cases} \text{ Par } \underline{\text{quotient}} \text{ de limites : } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \left(\frac{1}{e}\right)^n = 2 \text{ car } \frac{1}{e} \in] -1; 1[\\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - e^n = -\infty \end{cases} \text{ Par } \underline{\text{quotient}} \text{ de limites : } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 2^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \text{ mais en restant } \underline{\text{positif}}, \text{ car, pour } n \geq 0, \text{ on a } \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ en étant aussi } \underline{\text{positif}}, \text{ donc, par quotient de limites : } \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$$

$$\bullet \text{ Avec les mêmes limites que précédemment : } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \ln(n) = -\infty \end{cases} \cdot \text{ Donc, pour } (b_n) \text{ il s'agit d'une } \underline{\text{forme indéterminée}}$$

Corrigé Entraînement 4

- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < -\frac{4}{5} < 1 \end{cases}$ Donc, par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \times e^n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - n = -\infty \end{cases}$ Donc, par produit de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - n = -\infty \end{cases}$ Donc, par produit de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n) \ln(n) = -\infty$
Et par passage à l'inverse $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 1 = -1 \end{cases}$ Donc, par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = -\infty$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 - e^{-n} = 6 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + 5 = +\infty \end{cases}$ Donc, par quotient de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,4^n - 2 = -2 \text{ car } -1 < 0,4 < 1 \end{cases}$ On a alors, par quotient de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = -\infty$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \text{ car } 3 > 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}\right) = 0 \end{cases}$ Donc, pour (a_n) : **cas indéterminé.**
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n - 3 = -3 \text{ car } -1 < 0,2 < 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 0,2^n = 0 \text{ avec } 3 \times 0,2^n > 0 \end{cases}$ Donc, par quotient de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$

Corrigé Entraînement 5

- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{7}{n} = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 7 + \frac{3}{n} = 7 \end{cases}$ Donc, par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3 \times 7 = 21$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - 7n = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} - 7 = -7 \end{cases}$ Donc par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$
- On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n = +\infty$. Donc, par quotient de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$
- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{3} < 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 3^n = +\infty \text{ car } 3 > 1 \end{cases}$ Donc, pour (d_n) il s'agit d'une **forme indéterminée**

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{n} = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} - 6 = -6 \end{cases} \text{ Donc, par } \underline{\text{quotient}} \text{ de limite } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + 2^n = +\infty \text{ car } 2 > 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 - 2^n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{Il s'agit pour } (z_n) \text{ d'un } \underline{\text{cas indéterminé}}$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n + 2 = +\infty \text{ car } 3 > 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - 2^n = -\infty \text{ car } 2 > 1 \end{cases} \text{ Donc, par } \underline{\text{produit}} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} -4 + 3 \times 2^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -4 + 3 \times \frac{1}{2^n} = -4 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} = 0 \text{ avec } 2^{-n} > 0 \end{cases} \text{ Donc, par } \underline{\text{quotient}} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$$

Corrigé Entraînement 6

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^2 = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - n = -\infty \end{cases} \text{ Donc par } \underline{\text{produit}} \text{ de limites, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

• $(-1)^n$ n'a pas de limite, donc par produit, (v_n) n'a pas de limite

• On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$. Donc, par quotient de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{3} < 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{-n} - 1 = -1 \end{cases} \text{ Donc, par } \underline{\text{quotient}} \text{ de limite } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n^2} = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} - 2 = -2 \end{cases} \text{ Donc, par } \underline{\text{produit}} \text{ de limite } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -4$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n + 1 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + \frac{1}{n^2} = -2 \end{cases} \text{ On a alors, par } \underline{\text{quotient}} \text{ de limite } \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = -\infty$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1,5^n - 1 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times 0,5^n = 0 \end{cases} \text{ On se retrouve pour } (a_n) \text{ dans un } \underline{\text{cas indéterminé}}.$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - 3n^2 = -\infty \end{cases} \text{ Donc, par } \underline{\text{produit}} \text{ de limite } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$$